Université Pierre et Marie Curie

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Joaquín Rodrigues Jacinto

(φ, Γ)-modules de de Rham et fonctions L p-adiques

---

dirigée par Pierre Colmez

Rapporteurs :

M. Denis Benois	Université de Bordeaux
M. Henri Darmon	McGill University

Soutenue le 25 novembre 2016 devant le jury composé de :

M. Denis Benois	Université de Bordeaux	rapporteur
M. Pierre Colmez	Université Pierre et Marie Curie	directeur
M. Olivier Fouquet	Université Paris-Sud	examinateur
M. Jan Nekovář	Université Pierre et Marie Curie	examinateur
M. Jacques Tilouine	Université Paris 13	examinateur

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Université Pierre et Marie Curie.
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Résumé

Nous étudions, dans cette thèse, la construction des fonctions L p-adiques des motifs sur $\mathbf{Q}$ et, plus particulièrement, des formes modulaires.

Dans les premiers trois chapitres on étend des constructions de Perrin-Riou pour construire, pour une représentation p-adique de de Rham V du groupe de Galois absolu $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$ (ou, plus généralement, un (φ, Γ)-module de de Rham sur l'anneau de Robba) et un système compatible d'éléments globaux, une fonction L p-adique. On montre, en utilisant des lois de réciprocité montrées par Perrin-Riou, Colmez, Cherbonnier-Colmez, Berger et Nakamura, que ces fonctions interpolent des valeurs arithmétiques intéressantes aux caractères localement algébriques.

Dans les derniers trois chapitres, on se spécialise au cas de dimension 2. On démontre, en s'inspirant des techniques de Nakamura et des nouvelles techniques de changement de poids de Colmez introduites pour l'étude des vecteurs localement algébriques dans la correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, une équation fonctionnelle pour notre fonction L p-adique. Comme une application de cette équation fonctionnelle, on fournit les argument manquants dans les travaux de Nakamura complétant la preuve de la conjecture ε locale de Kato pour les représentations de dimension 2. Pour le motif associé à une forme modulaire, on utilise tous ces résultats pour interpréter les valeurs interpolées par la fonction L p-adique en termes des valeurs spéciales de la fonction L complexe de cette forme.

Mots-clés

Fonctions L p-adiques, formes modulaires, (φ, Γ)-modules, théorie d'Iwasawa, correspondance de Langlands p-adique.

de Rham (φ, Γ)-modules and p-adic L-functions

Abstract

This thesis studies the construction of p-adic L-functions associated to motives over $\mathbf{Q}$ and, in particular, to modular forms.

In the first three chapters we generalize some constructions of Perrin-Riou in order to construct, for any p-adic de Rham representation V of the absolute Galois group $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ of $\mathbf{Q}_p$ (or, more generally, any de Rham (φ, Γ)-module over the Robba ring) and any compatible system of global elements, a p-adic L-function. We show, by the use of some reciprocity laws proved by Perrin-Riou, Colmez, Cherbonnier-Colmez, Berger and Nakamura, that these functions interpolate interesting arithmetic values at locally algebraic characters.

The last three chapters deal with the particular case of dimension 2. We show, inspired by some techniques of Nakamura and certain weight change techniques introduced by Colmez for the study of locally algebraic vectors in the p-adic Langlads correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, that our p-adic L-function satisfies a functional equation. As an application of our functional equation, we fulfil the missing arguments in the work of Nakamura, providing a complete proof of Kato's local ε-conjecture for 2-dimensional representations. For the motive associated to a modular form, we use these results to interpret the interpolated values of the p-adic L-function in terms of special values of the complex L-function of the form.

Keywords

p-adic L-functions, modular forms, (φ, Γ)-modules, Iwasawa theory, p-adic Langlands correspondence.

Table des matières

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude des fonctions L p-adiques associées aux formes modulaires. En utilisant la théorie des (φ, Γ)-modules et en généralisant certains résultats de Perrin-Riou, on montre comment construire des fonctions L p-adiques associées à une forme modulaire supercuspidale en p tordue par des caractères suffisamment ramifiés.

Soit

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N), \omega_f)$$

une forme primitive (i.e cuspidale, nouvelle, propre pour les opérateurs de Hecke et normalisée) de poids $k \geq 2$, niveau N et caractère $\omega_f : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$. Supposons dans cette introduction que *la forme f est à coefficients rationnels*, ce qui permet de simplifier légèrement l'exposition des résultats. Pour η un caractère de Dirichlet, notons

$$L(f, \eta, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \eta(n) n^{-s}$$

la fonction L complexe associée à f et η. La série définissant $L(f, \eta, s)$ converge pour Re $s > 1$, admet un prolongement analytique à tout le plan complexe et elle satisfait une équation fonctionnelle reliant les valeurs $L(f, \eta, s)$ et $L(f, \eta^{-1}, k - s)$. La théorie des symboles modulaires permet de montrer l'existence des périodes complexes Ω_f^+ et Ω_f^- telles que, si η est un caractère de Dirichlet, j est un entier tel que $1 \leq j \leq k-1$ et $\pm$ est tel que $\eta(-1)(-1)^j = \pm 1$, alors

$$\frac{\Gamma(j)}{(2i\pi)^j} \frac{L(f, \eta, j)}{\Omega_f^\pm} \in \overline{\mathbf{Q}}.$$

Ceci permet, en fixant une immersion $\overline{\mathbf{Q}} \subseteq \overline{\mathbf{Q}}_p$ et en notant $\Lambda_\infty(f, \eta, s) = \frac{\Gamma(s)}{(2i\pi)^s} L(f, \eta, s)$, de voir ces valeurs dans le monde p-adique en posant

$$\iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta, j)) = \frac{\Lambda_\infty(f, \eta, j)}{\Omega_f^\pm} \in \overline{\mathbf{Q}}_p,$$

et la question naturelle de si l'on peut interpoler p-adiquement ces valeurs apparait.

Les fonctions L p-adiques peuvent être vues naturellement comme des fonctions rigides analytiques sur l'espace des poids p-adiques $\mathfrak{X}$ [1]. Si $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to \mathbf{C}_p^\times$ est un caractère d'ordre fini, une telle fonction $L_p \in \mathcal{O}(\mathfrak{X})$ est déterminée par ses valeurs sur les caractères de la forme $x \mapsto \eta(x)x^k$, $k \in \mathbf{Z}$. En particulier, si l'on pose, pour $s \in \mathbf{Z}_p$, $\langle x\rangle^s = \exp(s \log x)$, une fonction analytique sur l'espace des poids donne naissance à une famille de fonctions $L_p(\eta, s)$ d'une variable p-adique $s \in \mathbf{Z}_p$, pour η parcourant les caractères d'ordre fini.

La fonction L p-adique de la forme f est construite par interpolation (des multiples appropriés) des valeurs $\iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta, j))$, $1 \leq j \leq k-1$ et η un caractère d'ordre une puissance de p. Nous allons rappeler certaines constructions que l'on en connaît actuellement.

0.1 Le cas de pente finie

Fixons un isomorphisme $\overline{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{C}$. Soit

$$X^2 - a_p X + \omega_f(p)p^{k-1}$$

le polynôme de Hecke en p de la forme f et notons $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{Q}}_p$ ses racines.

Definition 1. On dit que f est de pente finie si au moins une des racines est non-nulle.

Remarquons simplement que, si $p \nmid N$, alors f est de pente finie, et que, si p divise N, alors f est de pente finie si et seulement si $a_p \neq 0$. Supposons dans la suite que f est de pente finie. Une des premières constructions ([45], [1], [58], [46]) de la fonction L p-adique de f dépend du choix d'une racine non nulle, disons α, telle que $v_p(\alpha) < k-1$ (ce qui est toujours possible, quitte a échanger α et β, car α et β sont des entiers algébriques et $v_p(\alpha) + v_p(\beta) = k-1$). En combinant la théorie des symboles modulaires et un résultat d'Amice, Vélu et Vishik on obtient le résultat suivant :

Théorème 0.1.1 (Mazur-Swinerton-Dyer, Manin, Amice-Vélu, Vishik)**.** *Soient f et α comme ci-dessus. Il existe une unique fonction $L_{p,\alpha}(f) \in \mathcal{O}(\mathfrak{X})$ d'ordre $v_p(\alpha)$ telle que, si $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to \mathbf{C}_p^\times$ est un caractère de Dirichlet de conducteur p^n et j un entier tel que $0 \leq j \leq k-2$, on a*

$$L_{p,\alpha}(f)(\eta\chi^j) = e_{p,\alpha}(f, \eta, j)\frac{p^{n(j+1)}}{G(\eta^{-1})} \cdot \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j+1))$$

où $G(\eta^{-1}) = \sum_{a=0}^{p^n-1} \eta^{-1}(a)\exp(\frac{2i\pi a}{p^n})$ dénote la somme de Gauss du caractère η^{-1} et le facteur $e_{p,\alpha}(f, \eta, j)$ est défini par la formule

$$e_{p,\alpha}(f, \eta, j) = \begin{cases} \alpha^{-n} & si\ n > 0 \\ (1 - \alpha^{-1}\omega_f(p)p^{k-2-j})(1 - \alpha^{-1}p^j) & si\ n = 0. \end{cases}$$

1. L'espace $\mathfrak{X}$ est un espace analytique rigide dont les L-points, pour L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, sont donnés par $\mathfrak{X}(L) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$. Il est une union de boules ouvertes et donc quasi-Stein. Par un théorème d'Amice, les distributions sur $\mathbf{Z}_p^\times$ correspondent aux fonctions (rigides) analytiques sur $\mathfrak{X}$

0.2 Le système d'Euler de Kato

Il existe une construction alternative ([41], [19]) de la fonction L p-adique, qui est moins élémentaire mais a pourtant l'avantage de permettre de relier les valeurs en certains points entiers de la fonction L p-adique à des quantités de nature cohomologique, ce qui permet, par exemple, de démontrer des instances de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique et la conjecture principale d'Iwasawa pour les représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires. Nous rappelons dans ce qui suit la construction de Kato de la fonction L p-adique dans le cas où p est un nombre premier ne divisant pas le niveau N de f [2].

On sait, d'après Shimura pour les formes de poids 2 et Deligne en poids > 2, associer à f une $\mathbf{Q}_p$-représentation $V(f)$ du groupe de Galois absolu $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$, de dimension 2, non-ramifiée en dehors Np, de Rham en p et caractérisée par la propriété suivante : pour tout $l \nmid Np$, si Frob_l désigne le Frobenius arithmétique en l, alors

$$\det(1 - \mathrm{Frob}_l^{-1} X | V(f)^{I_l}) = 1 - a_l X + l^{k-1}\omega_f(l) X^2.$$

De plus, si $p \nmid N$, $V(f)$ est cristalline en p. Notons aussi par $V(f)$ la restriction de $V(f)$ au groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Soient $F_\infty = \cup_n \mathbf{Q}_p(\mu_{p^n})$ l'extension cyclotomique de $\mathbf{Q}_p$, $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p(\mu_{p^n})) \subseteq \Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ et $\chi : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique. La construction de Kato repose sur la construction d'un système d'Euler [3] $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$ attaché à f dans la représentation $V = V(f)^*(1) = V(f)(k)$ (qui est de Rham à poids de Hodge-Tate 1 et k en p), dont les niveaux en les différentes puissances de p fournissent un élément, aussi noté $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$, de la cohomologie d'Iwasawa

$$H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) = \varprojlim_n H^1(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^n}), T) \otimes \mathbf{Q}_p \cong H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{D}_0(\Gamma, V))$$

de la représentation V, où la limite est prise par rapport aux applications de corestriction et T dénote n'importe quel $\mathbf{Z}_p$-réseau de V stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Dans le dernier isomorphisme, qui est une conséquence du lemme de Shapiro, $\mathscr{D}_0(\Gamma, V)$ dénote l'espace des mesures sur Γ à valeurs dans V.

Soient L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $\xi : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times \in \mathfrak{X}(L)$. L'intégration fournit des applications de spécialisation envoyant un élément $\mu \in H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}_0(\Gamma, V))$ sur

$$\int_\Gamma \xi \cdot \mu \in H^1(\mathbf{Q}_p, V(\xi)),$$

2. cf. [19] pour les modifications nécessaires dans le cas semi-stable et [26] pour le cas où la représentation dévient cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$.

3. Les éléments zêta de Kato dépendent d'un certain nombre de choix que l'on ignore dans cette introduction afin de simplifier l'exposition.

où $V(\xi)$ est la tordue de V par le caractère ξ, vu comme caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ via la projection $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \Gamma \xrightarrow{\chi} \mathbf{Z}_p^\times$.

Notons $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ le module de de Rham de V de la théorie de Hodge p-adique. On a une application exponentielle

$$\exp : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to H^1(\mathbf{Q}_p, V)$$

construite par Bloch et Kato ([11]) à partir de la suite exacte fondamentale de la théorie de Hodge p-adique, et une exponentielle duale

$$\exp^* : H^1(\mathbf{Q}_p, V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V),$$

adjointe de l'application exponentielle pour les dualités induites par la dualité locale de Tate. Ces applications jouent un rôle très important dans la théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques. Le système d'Euler de Kato a la propriété remarquable suivante :

Théorème 0.2.1 (Kato). *Pour tout $j \in \{1, \dots, k-1\}$ et tout caractère $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L$ d'ordre fini, on a l'égalité suivante dans $L \otimes \mathrm{Fil}^{-j}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \cong L \otimes \mathbf{Q}_p \cdot f$:*

$$t^{-j} \cdot \exp^*\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta\chi^{-j} \cdot \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}\Big) = \frac{1}{j!}\iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta, j)) \cdot f,$$

où t dénote l'élément $2i\pi$ de Fontaine.

Le théorème ci-dessus s'interprète comme suit. Si p^n est le conducteur de η, le terme de gauche s'exprime comme combinaison linéaire des valeurs $\exp^*(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot (\sigma_a(\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}))) \in L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(-j))$, $a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times$. Le L-espace vectoriel filtré $L \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est de dimension 2 et f est un générateur canonique de la droite qui engendre cette filtration. L'application $t^{-j}\exp^*$ tombe sur $L \otimes t^{-j}\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(-j))$ qui est canoniquement isomorphe à $L \otimes \mathrm{Fil}^{-j}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ si $1 \le j \le k-1$. Ces valeurs sont donc des multiples de f, et le théorème dit que leurs coefficients sont exprimés en termes des valeurs spéciales de la fonction L complexe de f.

Si $p \nmid N$ (i.e si $V(f)$ est cristalline), ce théorème permet à Kato d'appliquer la machine à fonctions L p-adiques de Perrin-Riou ([52], [53], [41])

$$\mathrm{Log}_V : H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V)) \to \mathscr{O}(\mathfrak{X}) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V),$$

interpolant p-adiquement les applications exponentielles et (d'après un théorème de Colmez, Benois et Kato-Kurihara-Tsuji) les exponentielles duales de Bloch-Kato pour des différentes tordues de la représentation en question.

Théorème 0.2.2 ([41] thm. 16.6). *Soit $e_\alpha \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(f)) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))$ un vecteur propre du Frobenius de valeur propre α. On a alors*

$$L_{p,\alpha}(f) = \langle \mathrm{Log}_V(\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}), e_\alpha \rangle.$$

Remarquons que l'on dispose dans tous les cas d'un système d'Euler $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$ et que l'application de Perrin-Riou a été généralisée pour les représentations de de Rham par des travaux de Colmez ([16]) et Cherbonnier-Colmez ([13]) et, pour un (φ, Γ)-module sur l'anneau de Robba $\mathscr{R}$, par Nakamura ([47]). Mais ces applications ne s'expriment pas naturellement en termes de fonctions analytiques sur l'espace des poids et ne fournissent malheureusement pas si simplement des fonctions L p-adiques.

0.3 La série principale unitaire

Mentionnons encore une autre construction de la fonction L p-adique ([30]), due à Emerton. La forme f de poids k et niveau N donne naissance à une représentation automorphe $\pi_f = \pi_\infty \otimes \pi_p \otimes \pi^p$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_{\mathrm{f}}^p)$ où $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathbf{A}_{\mathrm{f}}^p$) dénote les adèles (resp. adèles finis hors de p) de $\mathbf{Q}$. Soit $V = V(f)(k-1)$. On sait ([31]), d'après la compatibilité entre les correspondances de Langlands locale classique et p-adique, que

$$\Pi(V)^{\mathrm{alg}} = \pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}$$

où $\Pi(V)^{\mathrm{alg}}$ dénote les vecteurs localement algébriques de la représentation de $\mathrm{GL}(\mathbf{Q}_p)$ de Banach associée à V par Colmez (cf. [21]) et Sym^{k-2} la $k-2$-ième puissance symétrique de la représentation évidente de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

0.3.1 Cohomologie complétée

Soit

$$K^p = \{g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \prod_{l \neq p} \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_l) | g \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \bmod N\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f^p).$$

La cohomologie complétée de la tour de courbes modulaires [4]

$$Y(K^pK_p) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) / \mathbf{C}^\times K^pK_p,$$

où K_p est un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, est définie par

$$\tilde{H}_c^1(K^p) = \varprojlim_n \varinjlim_{K_p} H_c^1(Y(K^pK_p), (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$$

où les limites sont prises sur les entiers positifs n et sur tous les groupes ouverts compacts K_p de G. Ceci définit un $\mathbf{Q}_p$-espace de Banach muni d'une action $\mathbf{Q}_p$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, de l'algèbre de Hecke $\mathbf{T}$ de K^p, et du groupe $\pi_0 = \{\pm 1\}$ à deux éléments (en échangeant les deux composantes connexes de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})/\mathbf{C}^\times \cong \mathbf{C} \backslash \mathbf{R}$) commutant toutes entre elles. La représentation $\tilde{H}_c^1(K^p)$ ainsi obtenue est une représentation admissible au

4. On voit $\mathbf{C}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ comme les transformations de $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ qui sont $\mathbf{C}$-linéaires

sens de Schneider-Teitelbaum ([56]).

Soit λ le caractère de $\mathbf{T}$ défini par son action sur $(\pi^p)^{K^p}$ (qui est une représentation de dimension 1 de $\mathbf{T}$ car le niveau de f est N). On note, pour $\pm \in \{\pm 1\}$, $\tilde{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p)^{\pm}$ les éléments de $\tilde{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p)$ sur lesquels le groupe π_0 agit par multiplication par $\pm$ et $\tilde{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p)^{\pm} \otimes_{\mathbf{T}} \lambda$ le plus gros quotient de $\tilde{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p)^{\pm}$ sur lequel l'algèbre de Hecke agit à travers λ. On montre alors qu'il existe, pour chaque choix d'un signe $\pm \in \{\pm 1\}$, une unique immersion (à scalaire près) $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariante

$$\iota_{\pm} : \pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2} \to \tilde{H}^1_c(K^p)^{\pm} \otimes_{\mathbf{T}} \lambda.$$

Soit f de pente finie (i.e $p \nmid N$ ou $a_p \neq 0$) et supposons que la représentation π_p est une série principale $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}(\delta_1, \delta_2)$ induite par deux caractères δ_1, δ_2 de $\mathbf{Q}_p^{\times}$, où $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{G}$ est le Borel supérieur et $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}(\delta_1, \delta_2)$ dénote l'induite lisse du caractère $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \delta_1(a)\delta_2(d)$ de B. On peut supposer, par la théorie d'entrelacements (cf. [30], §4), que le caractère δ_1 est non ramifié [5]. Soit $\alpha = \delta_1(p)$, qui est aussi la valeur propre de l'opérateur U_p sur f si p divise le niveau de f où bien d'une p-stabilisation de f. On sait, d'après le calcul des vecteurs localement algébriques et localement analytiques des séries principales ([21], [23]), que

$$\Pi(V)^{\mathrm{alg}} = \pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}, \quad \Pi(V)^{\mathrm{an}} = \mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2) \otimes \mathrm{Sym}^{k-2},$$

où $\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ dénote l'induite analytique du caractère du Borel ci-dessus, et, par la compatibilité locale-globale dans la correspondance de Langlands p-adique ([31]), l'immersion $\iota_{\pm} : \Pi(V)^{\mathrm{alg}} \to \tilde{H}^1_c(K^p)^{\pm} \otimes_{\mathbf{T}} \lambda$ se prolonge [6] en une immersion $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariante

$$\Pi(V)^{\mathrm{an}} \to \tilde{H}^1_c(K^p)^{\pm} \otimes_{\mathbf{T}} \lambda.$$

0.3.2 Symboles modulaires

Soit $\mathscr{D}^0$ le groupe des diviseurs de degré 0 de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ (que l'on voit comme les pointes du demi-plan de Poincaré) muni de l'action évidente de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$. La dualité de Poincaré permet alors de montrer (cf. [30], prop. 4.2) l'existence d'une application

$$\mathscr{D}^0 \to (\tilde{H}^1_c(K^p))^*$$

dont l'image tombe dans la boule unité fermée de $(\tilde{H}^1_c(K^p))^*$. En dualisant les flèches du paragraphe précédent on obtient une application

$$\mathscr{D}^0 \to (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*.$$

5. Si $p \mid N$, l'un de deux caractères est ramifié et cette condition détermine uniquement δ_1. Si $p \nmid N$, δ_1 et δ_2 sont tous les deux non-ramifiés et on a deux choix

6. Dans [30], on montre qu'un tel prolongement existe dès que $v_p(\alpha) < k - 1$. Cette hypothèse, grâce à [31] et [23], n'est plus nécessaire.

En particulier, l'élément $\infty - 0 \in \mathscr{D}^0$ induit une forme linéaire

$$\mu_f^{\pm} : \Pi(V)^{\mathrm{an}} \to L$$

et, en regardant l'espace $\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ comme un espace de fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p^\times$ on obtient une immersion $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^\times, L) \to \Pi(V)^{\mathrm{an}}$. On peut donc considérer la restriction de $\mu_f^{\pm}$ à cet espace, et on a le résultat suivant :

Théorème 0.3.1 ([30], prop. 4.9)**.** *Il existe une constante $C \neq 0$ telle que, pour tout $\xi \in \mathfrak{X}$, on a*

$$L_{p,\alpha}(f)(\xi) = C \cdot \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \xi \cdot \mu_f^{\pm}.$$

Remarquons, pour conclure, que les isomorphismes

$$H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \cong \mathbf{D}(V)^{\psi=1} \subseteq \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1} \cong ((\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$$

permettent de voir le système d'Euler de Kato comme un élément dans $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*$. Les résultats d'Emerton et les isomorphismes ci-dessus permettent de faire un lien entre la théorie des systèmes d'Euler et les symboles modulaires sur la tour de courbes modulaires.

0.4 Le cas supercuspidal

On ne dispose pas au présent, lorsque f est une forme de pente infinie, d'une construction de la fonction L p-adique associée à f. Dans cette situation, l'approche classique de la construction de la fonction L p-adique s'appuyant sur la théorie des symboles modulaires (surconvergents) ne marche plus. On n'a d'ailleurs pas d'interprétation de l'application de Perrin-Riou en termes de distributions et on ne peut donc pas en tirer l'existence facilement à partir du système d'Euler de Kato. D'un autre côté, on ne connaît pas de modèle des représentations qui ne sont pas de la série principale permettant de voir naturellement les fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p^\times$ dans ses vecteurs localement analytiques, ce qui empêche une construction avec les méthodes d'Emerton. Il n'y a pourtant aucune raison de penser qu'une telle fonction n'existe pas...

0.4.1 Valeurs spéciales des fonctions L

Le lecteur pourra trouver dans ce texte la construction, pour tout caractère $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ de conducteur assez grand, des fonctions $s \mapsto \Lambda_p(f, \eta, s)$ analytiques sur $\mathbf{Z}_p$, interpolant, en tout entier $j \in \mathbf{Z}$, des valeurs spéciales, dûment interprétées p-adiquement, de la fonction L complexe de f. Le caractère η étant fixé, on ne dispose d'un résultat d'algébricité que pour un nombre fini des valeurs $\Lambda_\infty(f, \eta, j)$, et on a donc a priori seulement un nombre fini de candidats à interpoler. Cela ne suffit bien sûr pas pour déterminer une fonction analytique, mais la connaissance des valeurs aux caractères $\eta\chi^j$, pour $j < 0$ [7], oui. Le problème est alors de donner un sens p-adique à ces nombres complexes, ce que nous ferons en utilisant leur interprétation motivique : les valeurs $L(f,\eta,j)$, $j < 0$, sont des régulateurs d'éléments motiviques, comme l'a remarqué Beilinson ([3]), et Gealy ([36]) a relié ces éléments au système d'Euler de Kato.

L'isomorphisme $\overline{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{C}$ que l'on a fixé permet de voir $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ comme un caractère de Dirichlet de conducteur p^n, $n \geq 0$, et on note $f \otimes \eta^{-1} = \sum_n a_n \eta^{-1}(n) q^n$ la forme tordue de f par η^{-1}, qui est aussi une forme primitive (de niveau Np^{2n} et caractère $\omega_f \eta^{-2}$, au moins si n est assez grand). Rappelons que l'on a posé

$$\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},s) = \frac{\Gamma(s)}{(2i\pi)^s} \cdot L(f,\eta^{-1},s)$$

et que la forme f donne lieu à une représentation automorphe $\pi(f) = \prod_v{}' \pi_v(f)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_\mathbf{Q})$, où v parcourt l'ensemble des places de $\mathbf{Q}$ et $\pi_v(f)$ est une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_v)$. Pour η un caractère de Dirichlet, vu comme un caractère des adèles, on note $\varepsilon(\pi_l(f) \otimes \eta)$ les facteurs epsilon des composants locales de la représentation $\pi(f) \otimes \eta$ [8], de sorte que le facteur epsilon global associé à f et η est donné par la formule

$$\varepsilon(\pi(f) \otimes \eta) = \varepsilon(\pi_\infty(f)) \cdot \prod_{l|N} \varepsilon(\pi_l(f) \otimes \eta).$$

La fonction $\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},s)$ satisfait alors l'équation fonctionnelle

$$\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j) = i^k(-1)^j \varepsilon(\pi(f) \otimes \eta^{-1}, j - \frac{k-1}{2}) \cdot \Lambda_\infty(f,\eta,k-j).$$

Soit

$$V = V(f)(k-1)$$

(qui est une représentation de de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et $k-1$) et notons [9]

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}} \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$$

l'élément fourni par Kato. En utilisant des régulateurs p-adiques (qui seront introduits plus tard), nous allons construire, pour tout $j < 0$, des plongements

$$\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j) \mapsto \iota_p(\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j)) \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

7. Ou bien pour n'importe quel ensemble d'entiers denses dans $\mathbf{Z}_p$.
8. On a $\varepsilon(\pi_\infty(f)) = i^k$.
9. Par un petit abus de notation, le $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$ ci-dessous est le tordu par -1 de l'élément que l'on a aussi noté $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$ plus haut. On procède de cette manière afin de normaliser les poids de Hodge-Tate des représentations considérées dans le reste de l'introduction en 0 et $k-1$.

des valeurs spéciales de la fonction L complexe de la forme modulaire dans le module de de Rham de la représentation V. Ensuite, une des aspirations principales de cette thèse sera de construire des fonctions analytiques interpolant ces valeurs. On aura d'abord besoin d'un certain nombre de préliminaires pour décrire ces plongements.

0.4.2 Conjecture de Bloch-Kato pour les formes modulaires

Soit $Y_1(N)$ la courbe modulaire de niveau $\Gamma_1(N)$ et notons $\mathcal{KS}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}$ la $k-2$-ième variété de Kuga-Sato de niveau $\Gamma_1(N)$ et ε l'idempotent usuel ([57]). Soit $M(-j) = M(f \otimes \eta^{-1})(-j)$ le $-j$-ième twist de Tate du motif associé à la forme $f \otimes \eta^{-1}$ et considérons son dual de Tate

$$M^*(1+j) = M(f \otimes \eta)(k+j),$$

dont $V(\eta\chi^{j+1})$ est la réalisation p-adique.

Notons $\mathbf{T}$ l'algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke de niveau premier à N et $\lambda : \mathbf{T} \to L$ le caractère associé à $f \otimes \eta$. On a une description (cf. [57], [28], [36])

$$H^1(M^*(1+j)) = H^k_{\mathscr{M}}(\mathcal{KS}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}, k+j)(\varepsilon) \otimes_{\mathbf{T}} \lambda,$$

$$H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j)) = H^k_{\mathscr{D}}(\mathcal{KS}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}, \mathbf{R}(k+j))(\varepsilon) \otimes_{\mathbf{T}} \lambda,$$

$$H^1_{\text{ét}}(M^*(1+j)) = H^1(\mathbf{Q}, H^k_{\text{ét}}(\mathcal{KS}^{k-2}_{\Gamma_1(N),\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p)(k+j)(\varepsilon) \otimes_{\mathbf{T}} \lambda),$$

des groupes de cohomologie motivique, de Deligne et étale, respectivement, du motif $M^*(1+j)$, ainsi que des régulateurs

$$r_\infty : H^1(M^*(1+j)) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \to H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j)),$$

$$r_{\text{ét}} : H^1(M^*(1+j)) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p \to H^1_{\text{ét}}(M^*(1+j)).$$

On construit [10], en utilisant les symboles d'Eisenstein définis par Beilinson ([4]), des éléments (cf. [35], §3.2)

$$\mathscr{Z}(f \otimes \eta, j) \in H^1(M^*(1+j)).$$

On sait, d'après les conjectures de Beilinson ([28]), que ces éléments sont reliés aux valeurs spéciales de la fonction L de $f \otimes \eta^{-1}$ et on a, plus précisément, la variante suivante de la conjecture de Bloch-Kato :

Théorème 0.4.1 ([36], thm. 4.1.1)**.** *Il existe une $\mathbf{Q}$-structure naturelle de $H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j))$*

10. Comme avec le système d'Euler de Kato, les constructions ci-dessous dépendent toutes du choix d'un symbole modulaire, choix que l'on suppose adéquatement fait et donc implicite, renvoyant le lecteur au corps du texte pour une formulation précise des énoncés.

et une base δ [11] *de cette structure telle que, pour tout* $j > 0$, *on a*

$$r_\infty(\mathscr{Z}(f \otimes \eta, j)) = L^{(N),*}(f, \eta^{-1}, -j) \cdot \delta,$$

où $L^{(N),*}(f, \eta^{-1}, -j)$ *dénote le coefficient principal de la série de Laurent en* $s = -j$ *de la fonction* $L(f, \eta^{-1}, s)$ [12] *sans ses facteurs aux places divisant* N.

0.4.3 Plongements p-adiques des valeurs spéciales

Grâce aux travaux de Gros ([37]), Niziol ([51]), Besser ([10]), et Nekovar-Niziol ([50]), on a des régulateurs p-adiques

$$r_p : H^1(M^*(1 + j)) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(\eta\chi^{j+1})),$$

qui satisfont la relation de commutativité

$$r_{\text{ét}} = \exp \circ r_p,$$

où exp est l'exponentielle de Bloch-Kato.

Le théorème 0.4.1 ci-dessus suggère considérer les régulateurs p-adiques des éléments $\mathscr{Z}(f \otimes \eta, j)$ comme les bonnes valeurs p-adiques à interpoler. Notons que les éléments $r_p(\mathscr{Z}(f \otimes \eta, j)) \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(\eta\chi^{j+1}))$ vivent dans des modules différents. Nous allons expliquer comment les voir tous comme des éléments dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Si $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ est un caractère d'ordre fini, $G(\eta)$ dénote sa somme de Gauss et $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, alors $\sigma_a(G(\eta)) = \eta(a)^{-1}G(\eta)$ et, si e_η dénote une base du module $L(\eta)$ [13], le groupe Γ (et donc aussi $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$) agit trivialement sur l'élément $\mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}} = G(\eta) \cdot e_\eta \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes L(\eta)$ et est donc une base du L-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(L(\eta))$. Si $j \in \mathbf{Z}$, il en est de même de $\mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} = t^{-j}e_j \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes L(\chi^j)$. Notons

$$\mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}} = \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} = G(\eta)e_\eta \otimes t^{-j}e_j$$

qui est une base du module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(L(\eta\chi^j))$ et, pour $e_\eta^\vee = e_{\eta^{-1}}$ et e_{-j} les éléments duaux de e_η et e_j, on note

$$\mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1}e_\eta^\vee \otimes t^j e_{-j},$$

qui est une base du module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(L(\eta\chi^j)^*)$.

Si $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est de Rham, alors $V(\eta\chi^j)$ l'est aussi et on a, par ce qui précède,

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(\eta\chi^j)) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V \otimes L(\eta\chi^j))^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}} = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}},$$

11. Cette base dépend du choix du symbole modulaire et elle ne dépend ni du caractère η ni de j.
12. Il faut faire un minimum d'attention car la forme $f \otimes \eta^{-1}$ peut ne pas être primitive, mais elle l'est ([2], thm. 4.1) dès que le conducteur de η est assez grand.
13. $L(\eta)$ dénote le L-espace vectoriel de dimension 1 sur lequel $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers η.

de sorte que l'application $x \mapsto x \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee}$ induit un isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(\eta\chi^j)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V).$$

Notons

$$\Gamma^*(j+1) = \begin{cases} j! & \text{si } j \geq 0 \\ \frac{(-1)^{j-1}}{(-j-1)!} & \text{si } j < 0 \end{cases}$$

le coefficient principal de la série de Laurent de la fonction $\Gamma(s)$ en $s = j+1$. On pose, pour $j \geq 0$,

$$\iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j)) = \Gamma^*(j)\, G(\eta) \cdot r_p(\mathscr{Z}(f \otimes \eta, j)) \otimes \mathbf{e}_{\eta,j+1}^{\mathrm{dR},\vee} \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V).$$

Remarquons que, dans la formule définissant $\iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j))$, on "multiplie" et "divise" par $G(\eta)$, de sorte que son introduction n'a moralement aucun effet. La valeur $\Gamma^*(j)$ correspond donc à $\Gamma(j)$ et la puissance t^{j+1} correspond à la puissance de $2i\pi$ dans la définition de $\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j)$.

Théorème 0.4.2 (thm. 3.1.1 + lemme 6.5.3). *Il existe un ouvert $\mathfrak{U}_f \subseteq \mathfrak{X}$, ne dépendant que de la puissance de p divisant le niveau N de la forme f, et contenant tous les caractères d'ordre p^n pour n assez grand, et une unique fonction analytique $\Lambda_f \in \mathscr{O}(\mathfrak{U}_f) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$* [14] *telle que, si $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ est un caractère de conducteur p^n et $j < 0$ sont tels que $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_f$, alors*

$$\Lambda_f(\eta\chi^j) = p^{n(j+1)}\, G(\eta)^{-1} \cdot \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j+1)).$$

Remarque 0.4.3.

— Une description des valeurs conjecturales interpolées aux caractères de la forme χ^j, $j \leq 0$, pourrait, en ajoutant certains déterminants du Frobenius cristallin sur le module $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ (i.e des facteurs d'Euler), être formulée. Bien sûr, si la forme est supercuspidale en p, ce module est nul, or nos méthodes s'appliquent toute de même au cas de pente finie (à quelques modifications près pour ce qui concerne l'équation fonctionnelle en dimension 2 énoncée ci-bas).

— Le théorème ci-dessus permet de donner une interprétation conceptuelle, très probablement bien connue des experts, des facteurs d'interpolation apparaissant dans la formule

$$L_{p,\alpha}(f)(\eta\chi^j) = \frac{p^{n(j+1)}}{G(\eta^{-1})} \frac{\Gamma(j+1)}{(-2i\pi)^{j+1}} L(f, \eta^{-1}, j+1)$$

du théorème 0.1.1 :

— Le facteur $\Gamma^*(j+1)$ correspond évidement à $\Gamma(j+1)$.

14. i.e une fonction analytique sur $\mathfrak{U}_f$ à valeurs dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

— La version p-adique du terme $2\pi i$ est l'élément t de Fontaine et le facteur $\frac{p^{n(j+1)}}{G(\eta^{-1})}\frac{1}{(2\pi i)^{j+1}}$ correspond[15] au terme $\frac{p^{n(-j+1)}}{G(\eta^{-1})}t^{j+1} = \varepsilon(\eta \otimes |\cdot|^{j+1})^{-1}t^{j+1}$ qui est le coefficient (renormalisé par une puissance de p) de l'élément $\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta^{-1},j+1}$ permettant de voyager entre les différents modules de de Rham.

— Les éléments $\mathscr{Z}(f\otimes\eta,j)$ sont aussi étroitement liés au système d'Euler de Kato, et un point clé de la preuve du théorème repose sur un théorème de Gealy ([36], prop. 9.1.1), qui montre que

$$r_{\text{ét}}(\mathscr{Z}(f\otimes\eta,j)) = \int_\Gamma \eta\chi^{j+1}\cdot \mathbf{z}_{\text{Kato}}.$$

— Les méthodes du théorème fournissent, plus généralement, pour toute représentation $V \in \mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de Rham de dimension d et tout $z\in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,V)$, un ouvert $\mathfrak{U}_V \subseteq \mathfrak{X}$, ne dépendant que de la plus petite extension finie galoisienne $K/\mathbf{Q}_p$ sur laquelle V dévient semi-stable, et une unique fonction $\Lambda_{V,z}\in\mathcal{O}(\mathfrak{U}_V)$ interpolant des exponentielles et exponentielles duales de différentes spécialisations de l'élément z. Dans le cas général, on n'a pas, hélas ! une interprétation si satisfaisante des valeurs interpolées.

0.4.4 L'équation fonctionnelle en dimension 2 et valeurs aux entiers positifs

Il est naturel de se demander si ce que la fonction Λ_f interpole aux entiers positifs s'interprète aussi en termes de valeurs spéciales de la fonction L complexe. On répond à cette question en montrant que la fonction Λ_f satisfait une équation fonctionnelle, dont la preuve s'est avérée bien plus compliquée que celle dans le cas de pente finie.

Rappelons que, dans la bande critique $1\le j\le k-1$, les valeurs $L(f,\eta,j)$ sont naturellement interprétées (cf. 6.2.1) p-adiquement en les multipliant par les périodes complexes de la forme f. Si $j>k-1$, une équation fonctionnelle purement locale, accouplée avec une équation fonctionnelle satisfaite par le système d'Euler de Kato demontrée par Nakamura (6.5.4), fournit l'équation fonctionnelle cherchée, reliant les valeurs $\Lambda_f(\eta\chi^j)$ et $\Lambda_f(\eta^{-1}\chi^{k-2-j})$, permettant aussi de définir, quand $j\ge k$, un plongement p-adique

$$\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j)\mapsto \iota_p(\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j))\in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V).$$

Décrivons rapidement ce procédé. La correspondance de Langlands p-adique ([21]) nous permet de construire une involution

$$w : H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,V)\to H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,\check{V}),$$

15. $\varepsilon(\eta\otimes|\cdot|^{j+1}) = p^{-n(j+1)}G(\eta^{-1})$ est le facteur ε du caractère $\eta\otimes|\cdot|^{j+1}$, vu comme représentation de $\mathbf{Q}_p^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbf{Q}_p)$, par rapport au caractère additif de $\mathbf{Q}_p$ induit par le choix d'un générateur du module $\mathbf{Z}_p(1)$.

où $\check{V} = V^*(1)$ dénote le dual de Tate de V. On sait, d'après la dualité de Poincaré, que $\check{V} = V(2-k)$. Rappelons finalement que, pour $j \in \mathbf{Z}$, on dispose des isomorphismes canoniques $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V(j))$. Si $z \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$, on note $z \otimes e_j \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V(j))$ son image par cet isomorphisme.

Comme on l'a déjà remarqué, les méthodes du théorème 0.4.2 permettent de construire une fonction $\Lambda_{V,z}$ pour n'importe quel élément $z \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$ et, pour $V = V(f)(k-1)$, on peut en particulier considérer la fonction $\Lambda_{\check{V}(k-2), w(\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}) \otimes e_{k-2}} = \Lambda_{V, w(\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}) \otimes e_{k-2}}$. On montre d'abord une équation fonctionnelle reliant les valeurs de $\Lambda_{V,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}$ et de $\Lambda_{V, w(\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}) \otimes e_{k-2}}$. Par un théorème de Nakamura, on peut exprimer l'élément $w(\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}) \otimes e_{k-2}$ en termes de $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$. Ces deux résultats permettent de montrer l'équation fonctionnelle suivante, très ressemblante à celle du monde complexe, de la fonction L locale de f :

Théorème 0.4.4 (thm. 6.5.6). *Soient $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ d'ordre fini et $j > 0$ tels que $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_f$. Alors*

$$\Lambda_{V,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}(\eta\chi^j) = C(f,\eta,j) \cdot \Lambda_{V,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}(\eta^{-1}\chi^{-j+k-2}),$$

où

$$C(f,\eta,j) = G(\eta^{-1})^2 \cdot \varepsilon(\pi_p(f) \otimes \eta, \frac{k-1}{2})^{-1} \cdot \prod_{l|N'} \varepsilon(\pi_l(f) \otimes \eta, j + \frac{k-1}{2}).$$

Le théorème ci-dessus permet, en utilisant l'équation fonctionnelle complexe de la forme f et les plongements p-adiques que l'on a construits des valeurs spéciales aux entiers négatifs, de définir un plongement, pour $j \geq k$,

$$\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j) \mapsto \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j)),$$

et de montrer (lemme 6.5.7) que les valeurs interpolées par la fonction Λ_f aux caractères de la forme $\eta\chi^j$, $j \geq k$, s'interprètent aussi en termes de valeurs spéciales de la fonction L. Ceci nous permet d'obtenir notre premier théorème principal, décrivant les valeurs interpolées par la fonction L p-adique d'une forme modulaire en tous les caractères localement algébriques.

Théorème 0.4.5 (thm. 6.0.1). *Soient $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ d'ordre fini et $j \in \mathbf{Z}$ tels que $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_f$. Alors*

$$\Lambda_f(\eta\chi^j) = p^{n(j+1)}\, G(\eta)^{-1} \cdot \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j+1)).$$

0.4.5 Construction

La construction de la fonction analytique Λ_f repose sur la théorie des (φ, Γ)-modules. Pour une représentation galoisienne V, notons $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ le (φ, Γ)-module sur l'anneau de Robba $\mathscr{R}$ qui lui est associé par l'équivalence de catégories de Fontaine, Cherbonnier-Colmez et Kedlaya.

Comme suggéré par le théorème de Kato, la construction de Λ_f demande à étendre la construction du logarithme de Perrin-Riou aux (φ, Γ)-modules de de Rham. Si $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est de Rham, on a un isomorphisme, dû à Fontaine et Pottharst ([13], [54]),

$$\mathrm{Exp}^* : H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}.$$

Si $p \nmid N$, la représentation $V = V(f)(k-1)$ est cristalline [16] à poids de Hodge-Tate 0 et $k-1$, et la formule de Berger ([7])

$$(\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t])^{\psi=1} = (\mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$$

permet d'interpréter (cf. [19], prop. 4.10) le module $D^{\psi=1} = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$ en termes de distributions sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. On retrouve ainsi le logarithme de Perrin-Riou, construit par interpolation des exponentielles de Bloch-Kato, ce qui permet de retrouver ([19]), à partir de l'élément $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}} \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Z}_p, V)$, des distributions μ_α et μ_β, par la formule

$$\mathrm{Exp}^*(\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}) = \mathscr{A}_{\mu_\alpha} \cdot t^{1-k} f_\alpha \oplus \mathscr{A}_{\mu_\beta} \cdot t^{1-k} f_\beta,$$

où $\{f_\alpha, f_\beta\}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ formée par des vecteurs propres pour le Frobenius cristallin et $\mathscr{A}_{\mu_\alpha}$ (resp. $\mathscr{A}_{\mu_\beta}$) dénote la transformée d'Amice de la distribution μ_α (resp. μ_β). On récupère ainsi les fonctions L p-adiques $L_{p,\alpha}(f)$ et $L_{p,\beta}(f)$ de la forme f dépendant du choix d'une valeur propre du Frobenius cristallin.

Si V n'est pas cristabéline, on n'a pas une telle interprétation et il faut procéder autrement. L'idée pour contourner ce problème est d'imiter, en utilisant les techniques du dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique ([22], [21]), les opérations usuelles sur les distributions en termes de (φ, Γ)-modules, de sorte à pouvoir "intégrer" un caractère par rapport à l'élément $\mathrm{Exp}^*(\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}})$.

Soit $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans L et $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$, son dual topologique, l'espace des distributions sur $\mathbf{Z}_p$. On a des actions du groupe Γ et des opérateurs φ et ψ sur l'espace de distributions définies par les formules

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \cdot \sigma_a(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(ax) \cdot \mu, \quad \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \cdot \varphi(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(px) \cdot \mu, \quad \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \cdot \psi(\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi(x/p) \cdot \mu,$$

et une opération de "multiplication par x" définie par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \cdot m_x(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) x \cdot \mu$. Notons que $\psi(\mu) = 0$ si et seulement si la distribution μ est supportée sur $\mathbf{Z}_p^\times$ et que, si $\psi(\mu) = \mu$, alors $(1-\varphi)\mu$ est la restriction à $\mathbf{Z}_p^\times$ de μ. La transformée d'Amice

$$\mu \mapsto \mathscr{A}_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \cdot \mu$$

16. En travaillant un peu plus, ce qui suit peut être adapté aux représentations cristabélines.

induit un isomorphisme $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L) \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}^+$. L'opérateur différentiel $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$ correspond à la multiplication par x sur les distributions au sens que $\partial \mathscr{A}_\mu = \mathscr{A}_{m_x(\mu)}$. Enfin, on a, sur $\mathscr{R}$, des applications de "localisation"

$$\varphi^{-n} : \mathscr{R}^{]0,r_n]} \to L_\infty[[t]] : \quad T \mapsto \zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1,$$

où $\mathscr{R}^{]0,r_n]}$ dénote les fonctions convergent sur la couronne $0 < v_p(z) \leq r_n = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}$ et $L_\infty[[t]] = \varinjlim L_n[[t]]$. Les applications ∂ et φ^{-n} satisfont l'identité $\varphi^{-n} \circ \partial = p^n \frac{d}{dt} \circ \varphi^{-n}$. Si $x = \sum_{l \in \mathbf{N}} a_l t^l \in L_\infty[[t]]$, on note $[x]_0 = a_0$.

Lemme 0.4.6 (prop 1.2.1 + cor. 1.3.4)**.** *Soit $f \in \mathscr{R}^{\psi=0}$. Il existe une unique fonction analytique $\kappa \mapsto \kappa(\partial) f : \mathfrak{X} \to \mathscr{R}^{\psi=0}$ interpolant les valeurs $\partial^j z$, $j \in \mathbf{Z}$, aux caractères x^j. De plus, si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)^{\psi=1}$, $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère de conducteur p^n, $n > 0$, et $\kappa \in \mathfrak{X}$, alors*

$$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta^{-1}\kappa \cdot \mu = G(\eta)^{-1} \cdot \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\kappa(\partial)(1-\varphi)\mathscr{A}_\mu]_0.$$

L'avantage du lemme ci-dessus est que le terme de droite a un sens, pour tout (φ, Γ)-module D de de Rham, si l'on remplace $\mathscr{A}_\mu$ par $z \in \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1}$, où $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ est l'équation différentielle p-adique associée à D par Berger, dès que n est assez grand.

Notons $\Delta = \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$. Comme D est à poids de Hodge-Tate positifs, on a $D \subseteq \Delta$. On dispose d'un opérateur de connexion ∂ sur Δ au-dessus de l'opérateur $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$ sur $\mathscr{R}$. On a, pour tout $n \geq 0$, des applications de localisation

$$\varphi^{-n} : \Delta^{\psi=1} \to L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V),$$

et on note $[\cdot]_0 : L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ l'application $\sum_l a_l t^l \otimes d_l \mapsto a_0 \otimes d_0$. Ces applications satisfont $\varphi^{-n}\partial = p^n \frac{d}{dt}\varphi^{-n}$.

Si $z \in D^{\psi=1} \subseteq \Delta^{\psi=1}$, η est un caractère de conducteur p^n et $j \geq 0$, on a l'égalité suivante dans $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$, qui est l'analogue, en termes de théorie d'Iwasawa, de l'égalité du lemme 0.4.6 ci-dessus :

$$G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\partial^j(1-\varphi)z]_0 = p^{n(j+1)}\,\Gamma^*(j+1) \cdot \exp^*(\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta\chi^{-j}\mu_z) \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee}. \quad (1)$$

La proposition suivante permet de prolonger analytiquement le terme de gauche de cette égalité.

Proposition 0.4.7 (prop. 3.3.1)**.** *Soit $z \in \Delta^{\psi=0}$. Il existe une unique fonction rigide analytique $\delta \mapsto \delta(\partial) z \colon \mathfrak{X} \to \Delta^{\psi=0}$ interpolant les valeurs $\partial^j z$, $j \in \mathbf{Z}$, aux caractères x^j.*

La restriction à $\mathbf{Z}_p^\times$ permet d'interpoler p-adiquement l'opérateur ∂ mais, en revanche, l'application de spécialisation φ^{-n} n'est pas toujours définie sur $\Delta^{\psi=0}$. On a, sur un (φ, Γ)-module, une notion de rayon de surconvergence permettant définir les applications de localisation φ^{-n}. Une étude du rayon de convergence de l'élément $\kappa(\partial)$, pour un caractère $\kappa \in \mathcal{O}(\mathfrak{X})$, montre que le terme de gauche de l'équation définit bien une fonction analytique sur une boule ouverte autour η dans l'espace des poids. Le théorème suivant, appliqué à $D = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(f)(k-1))$, fournit la construction de la fonction Λ_f et, accouplé au théorème de Gealy et à l'équation fonctionnelle du théorème 0.4.4, permet de démontrer le théorème 0.4.5.

Théorème 0.4.8 (thm. 3.1.1)**.** *Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ de Rham à poids de Hodge-Tate positifs, $z \in D^{\psi=1}$, et notons $\mu_z = \mathrm{Exp}^*(z) \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D)$. Il existe un ouvert $\mathfrak{U}_D \subseteq \mathfrak{X}$, ne dépendant que du module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(D)$, et une unique fonction analytique $\Lambda_{D,z} \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_D) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ telle que, pour tout $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_D$, où η est un caractère d'ordre fini et $j \in \mathbf{Z}$, on a*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = p^{n(j+1)}\Gamma^*(j+1) \cdot \begin{cases} \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j} & si\ j \ll 0 \\ \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j} & si\ j \geq 0. \end{cases}$$

0.5 Équation fonctionnelle et conjecture ε locale de Kato

La conjecture ε locale de Kato ([39], [34] [49]) prédit l'existence d'une trivialisation canonique du déterminant de la cohomologie des représentations galoisiennes à coefficients dans un anneau p-adiquement complet A, interpolant des trivialisations standard (qui font intervenir les facteurs epsilon de la représentation, d'où le nom de la conjecture) quand A est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Elle peut donc être vue comme une interpolation p-adique des facteurs locaux des représentations de de Rham.

Des cas particuliers de la conjecture ont été montrés. Elle est connue en dimension 1 ([39], [48]), et pour certains types de représentationsm grâce aux travaux de Benois-Berger ([5]) et Loeffler-Venjakob-Zerbes ([44]). Nakamura ([49]) a construit, en utilisant la théorie des (φ, Γ)-modules et l'accouplement d'Iwasawa défini par Colmez, un candidat pour l'isomorphisme ε pour les (φ, Γ)-modules de rang 1 ou 2, et il a montré que, dans certaines instances, cet isomorphisme interpole bien les trivialisations standards.

0.5.1 L'équation fonctionnelle

L'équation fonctionnelle de la fonction L p-adique provient d'une équation fonctionnelle locale plus générale reliant l'involution w et la théorie d'Iwasawa de la forme modulaire. Ce lien avait déjà été remarqué par Dospinescu et par Nakamura ([49]), qui s'est en servi pour démontrer des instances de la conjecture ε de Kato.

Soit $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2, de Rham, non-trianguline et à poids de Hodge-Tate 0 et $k \geq 0$. Soit $\check{V} = V^*(1)$ le dual de Tate de V, qui est isomorphe (car V est de dimension 2) à $V \otimes \omega_V^\vee$, où $\omega_V = \det_V \otimes \chi^{-1}$. Notons π la représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associée à V par la correspondance de Langlands classique. Comme précédemment, considérons l'involution

$$w_V : H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \to H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, \check{V}).$$

Le théorème suivant, dont la preuve, inspirée largement des techniques introduites par Nakamura ([49]) et Colmez ([24]), repose sur la correspondance de Langlands p-adique et des calculs sur les modèles de Kirillov, est un des résultats principaux de ce travail.

Théorème 0.5.1 (thm. 4.6.1). *Soit $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$ et notons $\check{\mu} = w_V(\mu) \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, \check{V})$. Alors, pour tout $j \geq 1$, on a*

$$\exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \check{\mu}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{-j,\eta,\omega_D^\vee} = C(D, \eta, j) \cdot \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^j \cdot \mu) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{j,\eta^{-1}},$$

où

$$C(D, \eta, j) = \eta(-1)\frac{(-1)^j}{(j+k-1)!(j-1)!} \cdot \Omega^{-1} \cdot \frac{G(\eta^{-1})}{G(\eta)} \cdot \varepsilon(\pi \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^j).$$

0.5.2 La conjecture ε

Le théorème ci-dessus est une généralisation directe de la proposition 3.15 de [49], qui est le point clé pour montrer que les isomorphismes construits dans [49] interpolent les isomorphismes ε classiques quand V est de Rham et à poids de Hodge-Tate $k_1 \leq 0$ et $k_2 > 0$. Comme un corollaire des résultats de Nakamura et du théorème ci-dessus, on obtient

Théorème 0.5.2 (thm. 5.5.2). *La conjecture ε locale de Kato est vraie pour les représentations galoisiennes de dimension* 2.

0.6 Plan de la thèse

Cette thèse a six chapitres.

Dans le premier chapitre on trouvera des rappels généraux ainsi que le formalisme nécessaire sur les notions des fonctions rigides analytiques sur l'espace des poids à valeurs dans des limites d'espaces de Fréchets et notamment la preuve de l'existence d'un prolongement analytique de la connexion ∂ sur $\mathscr{R}$ et son lien avec l'analyse p-adique.

La deuxième partie montre comment, pour une représentation cristalline, les constructions du premier chapitre permettent de réinterpréter l'application Logarithme de Perrin-Riou obtenant une fonction rigide analytique sur l'espace des poids interpolant les applications exponentielle et exponentielle duale de Bloch et Kato. On écrit des relations exactes, bien connues déjà, entre la théorie d'Iwasawa de la représentation, la théorie d'analyse p-adique, et la théorie des (φ, Γ)-modules.

Le troisième chapitre contient le premier résultat principal de la thèse, à savoir l'extension analytique (partielle) de l'application Logarithme de Perrin-Riou pour les représentations de de Rham, fournissant des fonctions rigides analytiques sur des ouverts de l'espace des poids interpolant les applications exponentielle et exponentielle duale de Bloch et Kato.

Le quatrième chapitre comporte la preuve d'une série d'équations fonctionnelles, dont la plus générale est une équation fonctionnelle au niveau de la théorie d'Iwasawa d'un (φ, Γ) module de de Rham, non-triangulin de dimension 2. Comme application de cette équation fonctionnelle, on en obtient une pour notre fonction L locale.

Le cinquième chapitre montre comment, en utilisant l'équation fonctionnelle du quatrième chapitre, on peut compléter les calculs de Nakamura pour finir sa démonstration de la conjecture epsilon locale de Kato en dimension 2.

Finalement, on montre, à l'aide d'un théorème de M. Gealy et des conjectures de Bloch-Kato pour les formes modulaires, comment la construction de la fonction L locale peut être utilisée pour donner une construction de la fonction L p-adique d'une forme modulaire, sans aucune hypothèse sur elle, et montrer qu'elle interpole des valeurs spéciales de la forme (dûment interprétés p-adiquement) en tout caractère algébrique.

0.7 Notations

On fixe certaines notations :

— Soient p un nombre premier, $\mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, $\mathbf{Z}_p \subseteq \mathbf{Q}_p$ l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{Z}_p^\times$ le groupe des unités et $\mathbf{C}_p$ la complétion p-adique de la clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$.

— On fixe un système $(\zeta_{p^n})_{n \in \mathbf{N}}$, où $\zeta_{p^n} \in \overline{\mathbf{Q}}_p$, de racines p^n-ièmes primitives de l'unité satisfaisant la relation $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$ dès que $n \geq 0$. Si $n \in \mathbf{N}$, on note $F_n = \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$ le n-ième niveau de la tour cyclotomique et $F_\infty = \cup_n F_n$.

— Soit $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$. On définit le caractère cyclotomique $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^\times$ par la formule $g(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\chi(g)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et on note $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$ le noyau de χ, qui s'identifie au groupe de Galois absolu de F_∞, et $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{Q}_p} = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$ qui s'identifie à $\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$. Le caractère cyclotomique induit un isomorphisme $\chi : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_p^\times$. Si $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, on note $\sigma_a \in \Gamma$ son inverse par χ.

— Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, qui sera notre corps de coefficients, et notons $L_n = L \otimes F_n = L(\mu_{p^n})$ et $L_\infty = \cup_n L_n$. On note $\mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$ la catégorie des L-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue du groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On omettra souvent L des notations, cependant il faut être conscient que L est le corps sous-jacent et qu'il change au fur et à mesure des besoins. Par exemple, si η est un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et si on note $\mathbf{Q}_p(\eta)$ la représentation de dimension 1 engendrée par un élément e_η sur lequel l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est définie par la formule $g(e_\eta) = \eta(g)e_\eta$, on sous-entendra que le corps L de coefficients contient les valeurs prises par η.

Chapitre 1

Le cas trivial

Ce chapitre sert comme échauffement pour les chapitre ultérieurs. Il n'apporte presque aucun résultat nouveau mais il porte déjà les idées principales à généraliser plus tard, à savoir, le prolongement analytique de l'opérateur $k \mapsto \partial^k$ sur $\mathscr{R}^{\psi=0}$ (prop. 1.2.1) et les calculs permettant de retrouver l'intégration d'un caractère continu par rapport à une distribution à partir de ce prolongement et des applications de spécialisation (prop. 1.3.2).

1.1 Rappels

Commençons par quelques définitions classiques.

1.1.1 Les anneaux

— On définit le corps $\mathscr{E}$ par

$$\mathscr{E} = \left\{ \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k :\ a_k \in L;\ \liminf_{k\to+\infty} v_p(a_k) > -\infty;\ \lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty \right\},$$

muni de la valuation donnée par $v_{\mathscr{E}}(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k) = \inf_k v_p(a_k)$, ce qui fait de $\mathscr{E}$ un corps valué de dimension 2 dont on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau des entiers.

— Si $0 < r < s$, on définit $\mathscr{E}^{[r,s]}$ comme l'anneau des fonctions analytiques à valeurs dans L sur la couronne $C_{[r,s]} = \{z \in \mathbf{C}_p :\ r \leq v_p(z) \leq s\}$. On a

$$\mathscr{E}^{[r,s]} = \left\{ \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k : a_k \in L,\ \lim_{k\to-\infty} v_p(a_k)+ks = +\infty,\ \text{et}\ \lim_{k\to+\infty} v_p(a_k)+kr = +\infty \right\}.$$

L'anneau $\mathscr{E}^{[r,s]}$ est principal, de Banach pour la valuation $v^{[r,s]}$ définie par

$$v^{[r,s]}(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k) = \inf_{r\leq v_p(z)\leq s} v_p(f(z)) = \min\big\{ \inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k) + kr), \inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k) + ks)\big\}.$$

— Pour $0 < r < s$ on note

$$\mathscr{E}^{]r,s]} = \varprojlim_{t>r} \mathscr{E}^{[t,s]}$$

l'anneau de fonctions analytiques sur la couronne $C_{]r,s]} = \{z \in \mathbf{C}_p : r < v_p(z) \leq s\}$, qui est un anneau de Fréchet pour la famille de valuations $v^{[t,s]}$ pour $t \in]r,s]$.

— Soit $r_n = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)} = v_p(\zeta_{p^n} - 1)$. On note

$$\mathscr{R}^{]0,r_n]} = \mathscr{E}^{]0,r_n]}, \quad \mathscr{R} = \varinjlim_{s>0} \mathscr{E}^{]0,s]}$$

l'anneau de Robba et $\mathscr{E}^\dagger \subseteq \mathscr{R}$ son sous-anneau d'éléments bornés. C'est l'anneau des séries de Laurent (resp. des séries de Laurent à coefficients bornés) qui convergent sur une couronne $C_{]0,s]}$ pour s assez petit (qui dépend de chaque fonction). On remarquera que l'on obtient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ en complétant $\mathscr{E}^\dagger$, respectivement, par la topologie p-adique et par la topologie de Fréchet définie par la famille de normes $v^{[r,s]}$, $0 < r < s$.

Si $\mathscr{A}$ est un des anneaux définis ci-haut, on note $\mathscr{A}^+$ son intersection avec $L[[T]]$. On a, par exemple, $\mathscr{E}^+ = \mathscr{O}_L[[T]][\frac{1}{p}]$ et $\mathscr{R}^+$ s'identifie à l'anneau des fonctions analytiques sur la boule ouverte unité. On a une action de Γ sur tous les anneaux définis et une action de l'opérateur φ sur les anneaux $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$, définies par les formules

$$\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1 \quad \varphi(T) = (1+T)^p - 1.$$

Tous ces anneaux portent des topologies naturelles pour lesquelles les actions de Γ et φ sont continues. Posons $\mathscr{A} \in \{\mathscr{E}, \mathscr{R}\}$. L'anneau $\mathscr{A}$ est muni d'une action de l'opérateur ψ : $\mathscr{A}$ est une extension de degré p de $\varphi(\mathscr{A})$ avec une base formée par les éléments $(1+T)^i$, $i = 0, \ldots, p-1$, et on pose $\psi(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(f_i)) = f_0$. Ceci peut être écrit comme

$$\psi = p^{-1}\varphi^{-1} \circ \mathrm{tr}_{\mathscr{A}/\varphi(\mathscr{A})}.$$

L'opérateur ψ ainsi construit est un inverse à gauche de φ.

1.1.2 Dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique

Soit $X \subseteq \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ un ouvert (par exemple $\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p$ ou $\mathbf{Z}_p^\times$). On note

$$\mathrm{LC}(\mathrm{X}, L) \subseteq \mathrm{LA}(X, L) \subseteq \mathscr{C}^0(\mathrm{X}, L)$$

les espaces des fonctions sur X à valeurs dans L qui sont, respectivement, localement constantes, localement analytiques et continues. Le premier espace est fermé dans le deuxième, qui est un espace de type compact [1], et ceci est dense dans le dernier. Les L-duaux topologiques respectifs sont $\mathrm{LC}(\mathrm{X}, L)^*$, les distributions $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$ et les mesures $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$. Si L est un anneau, ces espaces sont naturellement des algèbres en définissant la multiplication comme la convolution de mesures.

Si $\mu \in \{\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L), \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)\}$, on définit sa transformée d'Amice par la formule

$$\mathscr{A}_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \cdot \mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \cdot \mu\right) T^n$$

et, pour $f \in \{\mathscr{E}, \mathscr{R}\}$, on pose

$$\phi_f = \mathrm{rés}_0\left(f(1+T)^{-x} \frac{dT}{1+T}\right),$$

où, pour $s \in \mathbf{Z}_p$, $(1+T)^s = \sum_{n \geq 0} \binom{s}{n} T^n$ et $\mathrm{rés}_0(\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \frac{dT}{1+T}) = a_{-1}$. Rappelons que les $\binom{x}{n}$ forment une base de Banach de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ et que, si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, ses coefficients de Mahler $a_n(f)$ sont définis par la formule $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \binom{x}{n}$.

Théorème 1.1.1 (Mahler, Amice, Colmez). *Les applications $\mu \mapsto \mathscr{A}_\mu$ et $f \mapsto \phi_f$ induisent des isomorphismes $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L) \cong \mathscr{E}^+$, $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L) \cong \mathscr{R}^+$, $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L) \cong \mathscr{E}/\mathscr{E}^+$, $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L) \cong \mathscr{R}/\mathscr{R}^+$. De plus, si $f \in \mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{E}$) et $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$ (resp. $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$) alors $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi_f \cdot \mu = \mathrm{rés}_0(\mathscr{A}_\mu f \frac{dT}{1+T})$.*

Tous ces espaces sont munis d'une action du groupe mirabolique $\mathrm{P}^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: pour $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, $b \in \mathbf{Z}_p$

— Si $\mu \in \{\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L), \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)\}$, alors $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \cdot (\begin{pmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(p^k a x + b) \cdot \mu$.

— Si $\phi \in \{\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L), \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)\}$, alors $(\begin{pmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \phi)(x) = \begin{cases} \phi(\frac{x-b}{p^k a}) & \text{si } x \in b + p^k \mathbf{Z}_p \\ 0 & \text{si } x \notin b + p^k \mathbf{Z}_p \end{cases}$.

— Si $f \in \{\mathscr{R}, \mathscr{E}\}$, alors $\begin{pmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot f = (1+T)^b \varphi^k \sigma_a(f)$.

On voit tout caractère continu $\delta : \mathbf{Q}_p^\times \to L^\times$ comme un caractère de P^+ en posant $\delta(\begin{pmatrix} ap^k & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \delta(ap^k) = \delta(a)\delta(p)^k$ et, si M est un P^+-module, on note $M \otimes \delta$ ou $M(\delta)$ le même module M muni de l'action de P^+ sur M tordue par δ. Le théorème ci-dessus induit des suites exactes de P^+-modules topologiques

$$0 \to \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L) \to \mathscr{E} \to \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L) \otimes \chi^{-1} \to 0,$$

$$0 \to \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L) \to \mathscr{R} \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L) \otimes \chi^{-1} \to 0.$$

L'action de l'opérateur ψ induite par les suites exactes ci-dessus est donnée par les

1. Un espace de type compact est une limite inductive d'espaces de Banach dont les applications de transition sont compactes (l'image de la boule unité a une adhérence compacte)

formules suivantes

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)(\psi\cdot\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi(x/p) \quad (\mu \in \{\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L), \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)\}).$$

$$(\psi\cdot\phi)(x) = \phi(px) \quad (\phi \in \{\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L), \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)\}).$$

Les sous-module $(\mathscr{E}^+)^{\psi=0}$ (resp. $(\mathscr{R}^+)^{\psi=0}$) de $\mathscr{E}^+$ (resp. $\mathscr{R}^+$) correspond aux mesures (resp. distributions) à support dans $\mathbf{Z}_p^\times$ et l'application $f \mapsto \phi_f$ envoie un élément $f \in \{\mathscr{E}^{\psi=0}, \mathscr{R}^{\psi=0}\}$ sur une fonction supportée dans $\mathbf{Z}_p^\times$. Le suites exactes ci-dessus induisent des suites exactes

$$0 \to \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^\times) \to \mathscr{E}^{\psi=0} \to \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p^\times) \otimes \chi^{-1} \to 0,$$

$$0 \to \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times) \to \mathscr{R}^{\psi=0} \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^\times) \otimes \chi^{-1} \to 0.$$

Si $\alpha \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ (resp. $\alpha \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$), on définit l'opérateur m_α de "multiplication par α" par les formules

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\cdot m_\alpha(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \alpha(x)\phi(x)\cdot\mu, \quad \mu \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L) \text{ (resp. } \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)),$$

$$m_\alpha(\phi)(x) = \alpha(x)\phi(x), \quad \phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L) \text{ (resp. } \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)).$$

La multiplication par la fonction x correspond à l'opérateur de dérivation $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$ sur $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$: si $f \in \{\mathscr{E}, \mathscr{R}\}$ et $\mu \in \{\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L), \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)\}$, alors

$$\phi_{\partial f} = m_x(\phi_f), \quad \mathscr{A}_{m_x(\mu)} = \partial\mathscr{A}_\mu.$$

Si $f \in \mathscr{R}$, l'écriture des opérateurs de restriction en termes de l'action du mirabolique permet de définir

$$\mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p}(f) = (1+T)^a\varphi^k \circ \psi^k(1+T)^{-a}\cdot f.$$

Cette expression a un sens pour n'importe quel (φ, Γ)-module sur $\mathscr{R}$ et les opérateurs ainsi définis sont des projecteurs qui permettent de voir $\mathscr{R}$ comme un faisceau P^+-équivariant sur $\mathbf{Z}_p$ dont on note $\mathscr{R} \boxtimes U$ les sections sur un ouvert compact $U \subseteq \mathbf{Z}_p$.

1.1.3 Caractères de $\mathbf{Z}_p^\times$

Soit $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to \mathbf{C}_p^\times$ un caractère de conducteur p^n. On définit, pour $b \in \mathbf{Z}_p$, $G(\eta, b) = \sum_{a=1}^{p^n-1} \eta(a)\zeta_{p^n}^{ab}$ la somme de Gauss tordue et on note $G(\eta) = G(\eta, 1)$. On note η^{-1} le caractère de Dirichlet modulo p^n, défini par $\eta^{-1}(n) = \eta(n)^{-1}$ pour $n \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times$. Rappelons deux résultats classiques de la théorie des caractères :

Proposition 1.1.2. *Soit $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to \mathbf{C}_p^\times$ un caractère de conducteur p^n. Alors*

— $G(\eta, b) = \eta^{-1}(b)G(\eta, 1)$ *pour tout* $b \in \mathbf{Z}_p$.

— $G(\eta)G(\eta^{-1}) = \eta(-1)p^n$.

Si $f \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, \mathbf{C}_p)$ est une fonction localement constante modulo p^n et à support compact, on peut définir sa transformée de Fourier discrète par la formule

$$\hat{f}(x) = p^{-m} \sum_{y \bmod p^m} f(y)e^{-2\pi ixy},$$

où m est un entier arbitraire tel que $m \geq \sup(n, -v_p(x))$, et $e^{-2\pi ixy}$ est la racine de l'unité d'ordre une puissance de p définie par l'application $\mathbf{Q}_p \to \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbf{Z}$ et par le choix du système $(\zeta_{p^n})_{n\in\mathbf{N}}$ de racines de l'unité : si $k \in \mathbf{N}$ est tel que $a = p^k yx \in \mathbf{Z}_p$, alors $e^{-2\pi ixy} = \zeta_{p^k}^{-a}$. Si η est un caractère de Dirichlet de conducteur p^n, on a

$$\hat{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{G(\eta^{-1})}\eta^{-1}(p^n x) & \text{si } n > 0 \\ \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(x) - p^{-1}\mathbf{1}_{p^{-1}\mathbf{Z}_p}(x) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

En particulier, on observe que $\hat{\eta}$ est à support dans $p^{-n}\mathbf{Z}_p^\times$ (resp. $p^{-1}\mathbf{Z}_p$) si $n > 0$ (resp. si $n = 0$).

1.1.4 L'espace des poids p-adiques

On note

$$\mathfrak{X} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p^\times, \mathbf{C}_p^\times)$$

l'espace des poids p-adiques, formé par les caractères continus de $\mathbf{Z}_p^\times$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p$. Posons $q = p$ si $p > 2$ et $q = 4$ si $p = 2$. On a $\mathbf{Z}_p^\times = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times \times (1 + q\mathbf{Z}_p)$. L'application logarithme induit un isomorphisme de groupes $(1 + q\mathbf{Z}_p, \times) \xrightarrow{\sim} (q\mathbf{Z}_p, +)$, d'inverse l'application exponentielle. On a un isomorphisme

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} ((\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times)^\wedge \times \mathrm{B}(1, 1^-) : \quad \eta \mapsto (\eta|_{(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times}, \eta(\exp(q))),$$

où $B(1, 1^-) \subseteq \mathbf{C}_p$ est la boule unité ouverte centrée en 1, qui nous permet de voir $\mathfrak{X}$ comme un espace rigide analytique, copie de $p-1$ (resp. 2 si $p = 2$) boules. L'inverse de cet isomorphisme envoie $(\chi, z) \in ((\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times)^\wedge \times \mathrm{B}(1, 1^-)$ sur le caractère $x \mapsto \chi(\bar{x})z^{\frac{\log(x)}{q}} \in \mathfrak{X}$, ou $\bar{x}$ dénote la réduction modulo p (resp. $2p$ si $p = 2$) de x. Si $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L \in \mathfrak{X}$, on note $z_\eta = \eta(\exp(q)) \in \mathrm{B}(1, 1^-)$ la deuxième coordonné de l'image de η par l'isomorphisme ci-dessus.

L'espace $\mathfrak{X}$ admet un recouvrement croissant admissible $\mathfrak{X} = \cup_n \mathfrak{X}_n$ par des ouverts affinoïdes $\mathfrak{X}_n = ((\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times)^\wedge \times \mathrm{B}(1, p^{-\frac{1}{n}})$, ce qui fait de $\mathfrak{X}$ un espace quasi Stein. On note $\mathcal{O}(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)$ les anneaux des fonctions analytiques de ces espaces. On a

$$\mathcal{O}(\mathfrak{X}) = \varprojlim_n \mathcal{O}(\mathfrak{X}_n).$$

On dispose ([1]) d'un isomorphisme, dû à Amice,

$$\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times, \mathbf{C}_p) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathfrak{X}),$$

envoyant $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times, \mathbf{C}_p)$ sur la fonction analytique $F_\mu \in \mathcal{O}(\mathfrak{X})$ définie par $F_\mu(\eta) = \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta(x) \cdot \mu$. Comme les polynômes sont denses dans l'espace des fonctions localement analytiques, l'isomorphisme précédent montre qu'une fonction $F \in \mathcal{O}(\mathfrak{X})$ s'annulant sur les caractères $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbf{Z}$, est identiquement nulle. On exprime ceci en disant que *les caractères de la forme $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbf{Z}$, sont Zariski denses dans $\mathfrak{X}$.*

On définit

$$\mathcal{O}(\mathfrak{X})\widehat{\otimes}\mathscr{R} = \varprojlim_{n>0} \varinjlim_{s>0} \varprojlim_{0<r<s} \mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\mathscr{E}^{[r,s]},$$

où le produit tensoriel à droite c'est le produit tensoriel complété usuel entre deux espaces de Banach. On peut, plus généralement, considérer des distributions à valeurs dans une limite inductive de Fréchets quelconque par les mêmes formules. On dira que f est une fonction analytique sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\mathscr{R}$ si elle appartient à $\mathcal{O}(\mathfrak{X})\widehat{\otimes}\mathscr{R}$. On note

$$\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times, \mathscr{R}) = \mathbf{D}(\mathbf{Z}_p^\times, L)\widehat{\otimes}\mathscr{R} = \varprojlim_{n} \mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes} \varinjlim_{s>0} \varprojlim_{0<r<s} \mathscr{E}^{[r,s]} = \mathcal{O}(\mathfrak{X})\widehat{\otimes}\mathscr{R},$$

où les égalités aux extrémités sont des définitions. Ceci permet de parler indistinctement de distributions sur $\mathbf{Z}_p^\times$ et de fonctions analytiques sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\mathscr{R}$.

1.2 Prolongement analytique de $k \mapsto \partial^k$

Si $z \in \mathcal{R}^{\psi=0}$ et $n \in \mathbf{N}$, on a

$$z = \sum_{i \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z) = \sum_{i \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} (1+T)^i \varphi^n(z_i),$$

où $z_i = \psi^n((1+T)^{-i}z)$ et, par la formule de Leibniz et l'égalité $\partial \circ \varphi = p\,\varphi \circ \partial$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\partial^k z &= \sum_{i \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial^{k-j}(1+T)^i p^{nj} \varphi^n(\partial^j z_i) \\
&= \sum_{i \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} i^{k-j}(1+T)^i p^{nj} \varphi^n(\partial^j z_i).
\end{aligned}$$

Si $\delta : \mathbf{Z}_p^\times \to \mathbf{C}_p$ est un caractère localement analytique, son poids ω_δ est défini par

$$\omega_\delta = \frac{\log \delta(a)}{\log a} = \delta'(1),$$

où $a \in \mathbf{Z}_p^\times$ est n'importe quel élément tel que $\log a \neq 0$. En particulier, on peut choisir $a = \exp q$ ($q = p$ si $p > 2$ et $q = 4$ si $p = 2$) et on obtient $\omega_\delta = \frac{\log z_\delta}{q}$ dans la notation de la section 1.1.4. Le poids ω_δ vaut 0 si et seulement si le caractère est localement constant, et $\omega_\delta \in \mathbf{Z}$ si δ est localement algébrique. La formule ci-dessus suggère résultat d'interpolation suivant :

Proposition 1.2.1. *Si $\delta \in \mathfrak{X}$ et $z \in \mathscr{R}^{\psi=0}$, alors il existe une constante $N(\delta)$ telle que la série*

$$\sum_{i \in (\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z})^\times} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{\omega_\delta}{j} \delta(i) i^{-j} (1+T)^i p^{Nj} \varphi^N(\partial^j z_i) \tag{1.1}$$

converge dans $\mathscr{R}$ dès que $N \geq N(\delta)$ et la somme ne dépend pas de $N \geq N(\delta)$. La fonction $\delta \mapsto \delta(\partial)z$ ainsi définie est une fonction analytique sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\mathscr{R}^{\psi=0}$.

On commence par rappeler quelques estimations classiques.

Lemme 1.2.2. *Soient $z \in \mathbf{C}_p$ et $f \in \mathscr{R}$. On a*

(i) Si $v_p(z) = \alpha > \frac{1}{p-1}$, alors $v_p((1+z)^p - 1) = \alpha + 1$.

(ii) Si $v_p(z) = \alpha < \frac{1}{p-1}$, alors $v_p((1+z)^p - 1) = p\alpha$.

(iii) Si $0 < r \leq s < \frac{1}{p-1}$, alors $v^{[pr,ps]}(f) = v^{[r,s]}(\varphi(f))$.

(iv) Si $0 < r \leq s < \frac{1}{p-1}$, alors $v^{[r,s]}(\psi(g)) \geq v^{[r/p,s/p]}(g) - 1$.

(v) Si $0 < v_p(z)$, alors $v_p(\sigma_a(z)) = v_p(z)$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^\times$.

(vi) Si $0 < r \leq s$, alors $v^{[r,s]}(f) = v^{[r,s]}(\sigma_a(f))$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^\times$.

(vii) $v^{[r,s]}(\partial^k f) \geq v^{[r,s]}(f) - ks$.

Démonstration. (i) et (ii) résultent de la formule $(1+z)^p - 1 = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} z^k$ et du fait que $v_p(\binom{p}{k})$ vaut 1 pour $1 \leq k < p-1$ et 0 pour $k = p$.

(iii) Une inégalité est conséquence immédiate du point (ii). Pour montrer l'inégalité $v^{[r,s]}(\varphi(f)) \leq v^{[pr,ps]}(f)$ on considère un point $w \in \mathbf{C}_p$ tel que $pr \leq v_p(w) \leq ps$. Le polygone de Newton du polynôme $P_w(T) = (1+T)^p - 1 - w$ est une droite de pente $-v_p(w)/p$ et ses racines sont donc toutes de valuation entre r et s, ce qui montre que φ induit une surjection de $C_{[r,s]}$ vers $C_{[pr,ps]}$ et que l'on a bien une égalité.

(iv) suit pour un élément $g \in \mathscr{R}^+[\frac{1}{T}]$ de la formule $\psi(g) = p^{-1}\varphi^{-1}(\sum_{\zeta^p=1} g((1+T)\zeta - 1))$ et de ce que, pour ζ une racine p-ième de l'unité, $v_p((1+z)\zeta - 1) = v_p(z)$ si $v_p(z) < v_p(\zeta - 1) = \frac{1}{p-1}$. Le cas général s'en déduit par continuité.

(v) et (vi) sont évidents.

(vii) En utilisant la formule $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$ et le fait que $v_p(1+z) = 0$ si $v_p(z) > 0$, il suffit de montrer que $v^{[r,s]}(f'(T)) \geq v^{[r,s]}(f) - s$. Or, si $f = \sum_n a_n T^n$, alors $f'(T) = \sum_n a_n n T^{n-1}$ et donc $v^{[r,s]}(f'(T)) = \inf_{r \leq \alpha \leq s, n \in \mathbf{Z}} v_p(a_n) + v_p(n) + (n-1)\alpha \geq \inf_{r \leq \alpha \leq s, n \in \mathbf{Z}} v_p(a_n) + n\alpha - s = v^{[r,s]}(f) - s$, ce qui permet de conclure par récurrence sur k. $\square$

Démonstration. (de la proposition (1.2.1))

Par définition d'une fonction analytique sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\mathscr{R}$, il faut montrer que, pour tout $n > 0$, il existe $s > 0$ et $N > 0$ tel que, pour tout $r \in]0, s]$, l'expression (1.1) converge pour la valuation naturelle de $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\mathscr{R}^{[r,s]}$, et que les éléments dans $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\mathscr{R}$ ainsi définis sont compatibles par rapport aux applications de restriction $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_{n+1})\widehat{\otimes}\mathscr{R} \to \mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\mathscr{R}$.

Fixons $i \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times$ et notons

$$f_j(\delta) = \binom{\omega_\delta}{j}\delta(i)i^{-j}(1+T)^i p^{Nj}\varphi^N(\partial^j z_i)$$

le terme général de la série définissant $\delta(\partial)$. On a les estimations suivantes :

— $v^{[r,s]}((T+1)^i) = 0$.

— $v^{[r,s]}(\binom{\omega_\delta}{j}) = v_p(\binom{\omega_\delta}{j}) \geq j(\inf(v_p(\omega_\delta), 0) - \frac{1}{p-1}) = jC_\delta$. Or $\omega_\delta = \frac{\log z_\delta}{q}$ et donc $v_p(\omega_\delta) \geq \inf_{k\geq 0}\{p^k v_p(z_\delta - 1) - k\} - v_p(q)$. Maintenant, si $\delta \in \mathfrak{X}_n$, la constante C_δ est bornée en fonction de n. En effet, si $v_p(z_\delta - 1) \geq \frac{1}{n}$, la formule pour ω_δ donne $C_\delta \geq C_n = \min(\inf_{k\geq 0}\{\frac{p^k}{n} - k\} - v_p(q), 0) - \frac{1}{p-1}$. On en déduit donc

$$v_p(\binom{\omega_\delta}{j}) \geq jC_n.$$

— $v^{[r,s]}(i^{-j}) = v_p(i^{-j}) = 0$.

— $v^{[r,s]}(\delta(i)) = v_p(\delta(i)) = 0$.

— Soient r et s tels que $z \in \mathscr{R}^{[r,s]}$ et $0 < r \leq s < \frac{1}{p^N(p-1)}$, de sorte que $\varphi^N \circ \psi^N$ stabilise $\mathscr{E}^{[r,s]}$. En utilisant les estimations du lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} v^{[r,s]}(\varphi^N(\partial^j z_i)) &= v^{[p^N r, p^N s]}(\partial^j z_i) \\ &\geq v^{[p^N r, p^N s]}(z_i) - jp^N s \\ &= v^{[p^N r, p^N s]}(\psi^N((1+T)^{-i}z)) - jp^N s \\ &\geq v^{[r,s]}(z) - N - jp^N s. \end{aligned}$$

Les calculs que l'on vient de faire impliquent que,

$$\inf_{\delta\in\mathfrak{X}_n} v^{[r,s]}(f_j(\delta)) \geq v^{[r,s]}(z) + j(C_n + N - N/j - p^N s).$$

Fixons un entier $n > 0$. Comme le coefficient multipliant j dans la formule ci-dessus ne dépend pas de r, on peut choisir N (et $s < \frac{1}{p^N(p-1)}$ comme ci-dessus) tel que $C_n + N - N/j - p^N s > 0$ pour tout $j \geq 2$, de sorte que l'on ait

$$\sup_{\delta\in\mathfrak{X}_n} v^{[r,s]}(f_j(\kappa)) \geq jC_{N,I},$$

où $C_{N,I} > 0$, ce qui montre que la série converge et définit une fonction analytique sur $\mathfrak{X}_n$ à valeurs dans $\mathscr{R}$.

On montre maintenant que l'expression ne dépend pas de N. Si l'on fixe $n > 0$ et on prend $N > 0$ et $s > 0$ comme ci-dessus, l'expression (1.1) définit une fonction rigide analytique en $\delta \in \mathfrak{X}_n$, et ces fonctions ainsi définies ne dépendent pas du choix de N quand δ est de la forme $\delta(x) = x^k$, pour $k \in \mathbf{Z}$. On conclut en remarquant que ces caractères sont Zariski denses dans $\mathfrak{X}_n$.

Enfin, les fonctions définies ne dépendent évidement pas de n, et on conclut donc que (1.1) définit un élément de $\mathcal{O}(\mathfrak{X})\widehat{\otimes}\mathscr{R}^{\psi=0}$. □

En variant z et en fixant $\delta \in \mathfrak{X}$, on peut voir $\delta(\partial)$ comme un opérateur sur $\mathscr{R}^{\psi=0}$. On retrouve les puissances de l'opérateur ∂ en posant $\delta(x) = x^k$.

Corollaire 1.2.3. *Soient $\delta \in \mathfrak{X}_n$ et $k(n) = C_n + 2$. L'opérateur $\delta(\partial)$ stabilise $\mathscr{R}^{]0,r_{k(n)}]}$.*

Démonstration. Cela suit du fait qu'il suffit de poser $N = k(n) - 1$ dans la définition de $\delta(\partial)$ et de ce que les restriction $\mathrm{Res}_{a+p^N\mathbf{Z}_p} = (1+T)^a\varphi^N \circ \psi^N(1+T)^{-a}$ stabilisent $\mathscr{R}^{]0,r_{N+1}]}$. □

Lemme 1.2.4. *Si $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, alors $\sigma_a \circ \delta(\partial) = \delta(a)^{-1}\delta(\partial) \circ \sigma_a$.*

Démonstration. Si $\delta(x) = x^k$, $k \in \mathbf{Z}$, le lemme est une conséquence de la formule usuelle $\sigma_a \circ \partial^k = a^{-k}\partial^k \circ \sigma_a$. On en déduit le résultat par prolongement analytique. □

Remarque 1.2.5. L'opérateur $\delta(\partial)$ étend la multiplication par δ sur $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$ et $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$. En effet, comme on a remarqué, $x^k(\partial) = \partial^k$, qui est une extension de la multiplication par la fonction x^k sur $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$ et $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$, et la densité Zariski de ces caractères permet de conclure. La proposition peut donc être vue comme une extension analytique à $\mathscr{R}^{\psi=0}$ de la multiplication par un caractère.

Lemme 1.2.6. *Soit $z \in \mathscr{R}^{\psi=0}$ et soit $\delta \in \mathfrak{X}$. Alors*

$$\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(\delta(\partial)z) = \delta(\partial) \cdot \mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(z).$$

Démonstration. Il s'agit de montrer, pour $\delta \in \mathfrak{X}$, la formule

$$(1+T)^a\varphi^n \circ \psi^n(1+T)^{-a}\delta(\partial)z = \delta(\partial) \cdot (1+T)^a\varphi^n \circ \psi^n(1+T)^{-a}z.$$

Les deux expressions coïncident sur les fonctions de la forme $\phi(x) = x^k$, $k \in \mathbf{Z}$. En effet, les identités $\partial(1+T)^a = a(1+T)^a$, $\partial \circ \varphi = p\varphi \circ \partial$ et $\partial \circ \psi = p^{-1}\psi \circ \partial$, donnent

$$\begin{aligned}
\partial^k \mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p} z &= \partial^k(1+T)^a\varphi^n \circ \psi^n(1+T)^{-a}z \\
&= (1+T)^a\varphi^n \circ \psi^n(1+T)^{-a}\partial^k z \\
&= \mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}\partial^k z.
\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure par densité des caractères x^k. □

Par le théorème d'Amice, les fonction analytiques sur $\mathfrak{X}$ correspondent aux distributions sur $\mathbf{Z}_p^\times$. Si on note $\lambda_z \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times, \mathscr{R}^{\psi=0})$ la distribution correspondant à la fonction analytique de la proposition 1.2.1, ceci nous permet, un peu plus généralement, de définir, en posant $\phi(\partial)\cdot z = \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \phi(x)\cdot\lambda_z$, la multiplication par une fonction $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$ localement analytique quelconque. Notons que l'application $\phi \mapsto \phi(\partial)\cdot z$ est, par construction, analytique en ϕ, et elle est donc déterminée par ses valeurs sus les caractères x^k, $k \in \mathbf{Z}$. En particulier, si $a \in \mathbf{Z}_p^\times$ et $n > 0$, on a des opérateurs $\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(\partial)$.

Lemme 1.2.7. *Si $z \in \mathscr{R}^{\psi=0}$, $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$, $a \in \mathbf{Z}_p^\times$ et $n > 0$, alors*

$$(\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}\cdot\phi)(\partial)\cdot z = \phi(\partial)\cdot \mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(z).$$

Démonstration. En vue du fait que la fonction caractéristique de $a+p^n\mathbf{Z}_p$ s'exprime comme combinaison linéaire de caractères de $\mathbf{Z}_p^\times$ localement constants modulo p^n, il suffit, par linéarité de la restriction et de l'application $z \mapsto \lambda_z$, et par densité des polynômes dans les fonctions localement analytiques, de montrer que, si $m \geq 0$, $k \in \mathbf{Z}$ et η est un caractère constante modulo p^m, alors

$$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta x^k \cdot \lambda_z = \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\partial^k \cdot \mathrm{Res}_{a+p^m\mathbf{Z}_p}(z).$$

Comme $z \in \mathscr{R}^{\psi=0}$, alors $z = \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \mathrm{Res}_{a+p^m\mathbf{Z}_p}(z)$ où $\mathrm{Res}_{a+p^m\mathbf{Z}_p}(z) = (1+T)^a\varphi^m(z_a)$, $z_a = \psi^m(1+T)^{-a}z$, en appliquant la formule (1.1), on obtient (observons que si η est localement constant, le poids de $\eta\chi^k$ est égale à k)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta x^k \cdot \lambda_z &= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \eta(a) a^{k-j}(1+T)^a p^{nj}\varphi^n(\partial^j z_a) \\
&= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \eta(a) a^{k-j}(1+T)^a \partial^j\varphi^n(z_a) \\
&= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \eta(a) \partial^{k-j}(1+T)^a \partial^j\varphi^n(z_a) \\
&= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\partial^k((1+T)^a\varphi^n(z_a)) \\
&= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\partial^k \mathrm{Res}_{a+p^m\mathbf{Z}_p}(z),
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^k \cdot \lambda_z = \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^k \cdot \lambda_z = \partial^k \mathrm{Res}_{a+p^n z} = \int_{\mathbf{Z}_p^\times} x^k \cdot \lambda_{\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(z)},$$

pour tout $k \in \mathbf{Z}$, et donc

$$(\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p} \cdot \phi)(\partial) \cdot z = \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} \phi(x) \cdot \lambda_z = \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \phi(x) \cdot \lambda_{\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(z)} = \phi(\partial) \cdot \mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(z),$$

ce qui permet de conclure. □

1.3 Intégration et spécialisations

On termine ce chapitre avec quelques calculs permettant de retrouver l'intégration en termes des applications de spécialisation, ce qui servira de motivation pour les constructions futures.

Soit $r_n = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)} = v(\zeta_{p^n} - 1)$. Pour $n > 0$, on définit les applications de "localisation en $\zeta_{p^n} - 1$" (cf. [13], III.2), comme

$$\varphi^{-n} : \mathscr{E}^{]0,r_n]} \to L_n[[t]] : \quad T \mapsto \varphi^{-n}(f)(T) = f(\zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1).$$

Si $z = \sum_{k \geq 0} a_k t^k \in L_n[[t]]$, $a_k \in L_n$, on note $[z]_k$ l'élément a_k. En particulier $[z]_0$ dénote l'évaluation de z en $t = 0$. Si $f \in \mathscr{R}^{]0,s]}$ et $n \geq 0$ est tel que $r_n \leq s$, l'élément $[\varphi^{-n}(f)]_0$ dénote donc l'évaluation de la fonction f en $\zeta_{p^n} - 1$. Les applications de localisation satisfont $\varphi^{-n} \circ \partial = p^n \cdot \frac{d}{dt} \varphi^{-n}$.

Lemme 1.3.1. *Soient $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$ et $z = \mathscr{A}_\mu \in (\mathscr{R}^+)^{\psi=0}$. Soit $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$ une fonction localement analytique. Alors*

$$\phi(\partial) \cdot z = \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \phi(x)(1+T)^x \cdot \mu.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier la formule pour les caractères de la forme x^k, qui sont Zariski denses dans $\mathfrak{X}$. Or

$$\partial^k z = \partial^k \mathscr{A}_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p^\times} x^k (1+T)^x \mu,$$

par définition de la transformée d'Amice. □

Proposition 1.3.2. *Soient $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$, $z = \mathscr{A}_\mu \in (\mathscr{R}^+)^{\psi=0}$ et $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^\times, L)$. Alors*

$$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \phi(x) \cdot \mu = [\varphi^{-m}(\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \phi(x) \zeta_{p^m}^{-x} \cdot \lambda_z)]_0.$$

Démonstration. En utilisant le lemme 1.3.1, on a

$$\begin{aligned}
[\varphi^{-m}(\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \phi(x)\zeta_{p^m}^{-x}\lambda_z)]_0 &= [\varphi^{-m}(\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \phi(x)\zeta_{p^m}^{-x}(1+T)^x\mu)]_0 \\
&= [\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \phi(x)\zeta_{p^m}^{-x}\zeta_{p^m}^{x}e^{tx/p^m}\mu)]_0 \\
&= \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \phi(x)\mu.
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.3. *Soient $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)^{\psi=0}$, $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère de conducteur p^n, $n > 0$, et $\kappa \in \mathfrak{X}$. Alors*

$$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta^{-1}\kappa \cdot \mu = G(\eta)^{-1} \cdot \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\kappa(\partial)\mathscr{A}_\mu]_0.$$

Démonstration. Il suffit, par densité de Zariski des caractères x^j, $j \in \mathbf{Z}$, dans $\mathfrak{X}$, de montrer que, pour tout $j \in \mathbf{Z}$, on a

$$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta^{-1}\chi^j \cdot \mu = G(\eta)^{-1} \cdot \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\partial^j\mathscr{A}_\mu]_0.$$

On a, en utilisant l'identité $\varphi^{-n} \circ \partial = p^n \cdot \frac{d}{dt}\varphi^{-n}$,

$$\varphi^{-n}\partial^j\mathscr{A}_\mu = p^{nj}(\frac{d}{dt})^j \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi^{-n}(1+T)^x \cdot \mu = p^{nj}(\frac{d}{dt})^j \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \sum_{k\geq 0} \zeta_{p^n}^x \frac{t^k x^k}{p^{nk}k!} \cdot \mu,$$

d'où on déduit

$$\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\partial^j\mathscr{A}_\mu]_0 = \int_{\mathbf{Z}_p^\times} (\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\zeta_{p^n}^{ax})x^j \cdot \mu.$$

La somme $\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\zeta_{p^n}^{ax}$ s'interprète en termes de transformée de Fourier :

$$\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\zeta_{p^n}^{ax} = p^n\hat{\eta}(-\frac{x}{p^n}) = p^n\eta(-1)G(\eta^{-1})^{-1}\eta^{-1}(x) = G(\eta)\eta^{-1}(x).$$

On en déduit

$$\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\partial^j\mathscr{A}_\mu]_0 = G(\eta) \cdot \int_{\mathbf{Z}_p} \eta^{-1}\chi^j \cdot \mu,$$

ce qui permet de conclure. □

Corollaire 1.3.4. *Soient $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)^{\psi=1}$, $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère de conducteur p^n,*

$n > 0$, et $\kappa \in \mathfrak{X}$. Alors

$$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta^{-1}\kappa \cdot \mu = G(\eta)^{-1} \cdot \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\kappa(\partial)(1-\varphi)\mathscr{A}_\mu]_0.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, comme η est déjà supporté sur $\mathbf{Z}_p^\times$, le terme de gauche ne se voit pas altéré si l'on remplace μ par sa restriction à $\mathbf{Z}_p^\times$. Comme $\psi(\mu) = \mu$, on a $(1-\varphi)\mathscr{A}_\mu = \mathscr{A}_{(1-\varphi)\mu} = \mathscr{A}_{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^\times}(\mu)}$, ce qui permet de conclure en utilisant le lemme précédent. □

Remarque 1.3.5. Comme on a remarqué dans l'introduction, le terme de droite du corollaire ci-dessus a l'avantage d'avoir un sens, au moins pour n assez grand, pour tout (φ, Γ)-module de de Rham, ce qui nous permettra de contourner le problème de ne pas posséder une interprétation en termes de distributions des objets sur lesquels on devra travailler.

Chapitre 2

Le cas cristallin

2.1 Le cas cristallin

L'objet de ce chapitre est d'appliquer les calculs faits jusqu'à présent à une représentation galoisienne cristalline afin d'interpréter les constructions de Perrin-Riou en termes du prolongement analytique de l'application $k \mapsto \partial^k$ et des application de spécialisation.

2.2 Rappels

2.2.1 Théorie de Hodge p-adique

Rappelons que $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dénote la catégorie des L-représentations du groupe de Galois absolu $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$. Soient $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subseteq \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ les anneaux de Fontaine de la théorie de Hodge p-adique. Pour $V \in \mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on considère

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}, \quad \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}},$$

les modules cristallin et de de Rham associés à V. Le module $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est un L-espace vectoriel de dimension finie muni d'un opérateur de Frobenius et d'une filtration, et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un L-espace vectoriel filtré. On a $\dim_L \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \leq \dim_L \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \leq \dim_L V$ et on dit que V est une représentation cristalline (resp. de de Rham) si $\dim_L\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \dim_L V$ (resp. $\dim_L\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_L V$). Si $K/\mathbf{Q}_p$ est une extension finie, on pose $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K} = K \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Si $j \in \mathbf{Z}$, on note $V(j) = V \otimes \chi^j$ et $x \mapsto x \otimes e_j$ l'isomorphisme de L-espace vectoriels $V \to V(j)$. Notons $x \mapsto x \otimes t^{-j} e_j$ l'isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(j))$ (resp. $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(j))$), envoyant un élément de la forme $x = \sum_i f_i \otimes v_i$, $f \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ (resp. $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$), $v \in V$, sur $\sum_i t^{-j} f_i \otimes (v_i \otimes e_j)$.

2.2.2 Application exponentielle de Bloch-Kato et sa duale

Rappelons la suite exacte fondamentale de la théorie de Hodge p-adique

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \to 0,$$

où $\alpha(x,y) = x+y$. Si $K/\mathbf{Q}_p$ est un extension finie et si $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_K$ est de Rham, en prenant le produit tensoriel de cette suite par V et les invariants sur l'action de $\mathscr{G}_K$, on obtient une suite longue de cohomologie dont le premier morphisme de connexion fournit une application exponentielle

$$\exp_{V,K} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V) \to H^1(K,V)$$

et une application exponentielle duale

$$\exp^*_{V,K} : H^1(K,V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V),$$

transposé de $\exp_{V^*(1),K}$ pour les accouplements parfaits fournis par la dualité locale [1]. Notons que $\exp_{V,K}$ se factorise à travers le quotient $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V)$ et que l'image de $\exp^*_{V,K}$ est incluse dans $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V)$.

Le morphisme $\alpha : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ envoyant x sur le cocycle $[\gamma \to x \cup \log\chi(\gamma)] \in H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ induit un isomorphisme et une loi de réciprocité de Kato dit que l'application $\exp^*_{V,\mathbf{Q}_p}$ est aussi obtenue via la composition $H^1(\mathbf{Q}_p,V) \to H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Mentionnons que, si $j \gg 0$, alors $\exp_{V(j),\mathbf{Q}_p}$ est un isomorphisme de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(j))$ sur $H^1(\mathbf{Q}_p, V(j))$ et de même pour $\exp^*_{V(-j),\mathbf{Q}_p} : H^1(\mathbf{Q}_p, V(-j)) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(-j))$.

On omettra dans la suite, dès que le contexte le permet, les indices des applications exponentielles et on notera tout simplement $\exp : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V) \to H^1(K,V)$, $\exp^* : H^1(K,V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V)$.

2.2.3 Cohomologie d'Iwasawa

Soient $F_n = \mathbf{Q}_p(\mu_{p^n})$, $F_\infty = \cup F_n$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ et $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(F_n/\mathbf{Q}_p)$. Soit $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[\Gamma]] = \varprojlim \mathbf{Z}_p[\Gamma_n]$ l'algèbre d'Iwasawa, vue comme l'algèbre des mesures sur Γ à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$ (la multiplication étant donnée par la convolution des mesures).

Si $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ses groupes de cohomologie d'Iwasawa sont définis par

$$H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) = \varprojlim_n H^i(F_n, T) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p,$$

1. C'est-à-dire, $\langle \exp^* x, y\rangle = (x, \exp y)$ pour tous $x \in H^1(K,V)$, $y \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V^*(1))$, où le premier est l'accouplement naturel $\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V^*(1)) \to L$ et le deuxième es l'accouplement local de Tate $(\ ,\ ) : H^1(K,V) \times H^1(K,V^*(1)) \to H^1(K,\mathbf{Q}_p(1)) \cong K \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}} \mathbf{Q}_p$.

où $T \subseteq V$ est un $\mathbf{Z}_p$-réseau de V stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (qui existe par compacité de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$), et la limite projective est prise par rapport aux applications de corestriction. Le lemme de Shapiro ([16] prop. II.1.1) montre que

$$H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \cong H^i(\mathbf{Q}_p, \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)$$

comme Λ-modules. Ces modules ont été étudiés par Perrin-Riou (cf. [52]) et on a le résultat suivant

Théorème 2.2.1 (Perrin-Riou)**.** *Soit $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Alors*

1. $H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) = 0$ *si* $i \notin \{1, 2\}$.
2. $H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$ *est isomorphe à* $V(-1)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ *comme Λ-module.*
3. *La suite d'inflation restriction*

$$0 \to H^1(\Gamma, \Lambda \otimes V^{\mathscr{G}_{F_\infty}}) \to H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \to H^1(F_\infty, \Lambda \otimes V)^\Gamma \to 0$$

est une suite exacte de Λ-modules. De plus, $H^1(\Gamma, \Lambda \otimes V^{\mathscr{G}_{F_\infty}})$ est le sous-Λ-module de torsion de $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$ et il est isomorphe, comme Λ-module, à $V^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ et $H^1(F_\infty, \Lambda \otimes V)^\Gamma$ est un Λ-module libre de rang $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$.

L'intégration d'une mesure fournit, pour $j \in \mathbf{Z}$ et $n \geq 0$, des morphismes naturels de projection

$$H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \to H^1(F_n, V(j)),$$

qui envoient un cocycle $\sigma \mapsto \mu_\sigma$ vers $\sigma \mapsto \int_{\Gamma_n} \chi(x)^j \cdot \mu_\sigma \otimes e_j$. Le groupe $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) = H^1(\mathbf{Q}_p, \Lambda \otimes V)$ est muni d'une structure de module sur l'algèbre d'Iwasawa, définie par les formules

$$\int_\Gamma f(x)(\sigma\mu) = \int_\Gamma f(\sigma^{-1}x) \cdot \mu, \quad \sigma \in \Gamma.$$

Plus généralement, soit $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to \mathbf{C}_p^\times$ un caractère continu et notons encore $\eta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{C}_p^\times$ le caractère de Galois associé que l'on obtient en composant η avec la projection $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \Gamma \cong \mathbf{Z}_p^\times$. Un petit calcul montre qu'un élément $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit sur la somme de Gauss $G(\eta)$ via multiplication par $\eta^{-1}(\sigma)$ et, si $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est de Rham, alors $V(\eta) = V \otimes_{\mathbf{Q}_p} \eta$ est aussi une représentation de de Rham et

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(\eta)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes L \cdot G(\eta) e_\eta.$$

Si $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$, l'application qui envoie un cocycle $\sigma \mapsto \mu_\sigma$ vers $\sigma \mapsto (\int_\Gamma \eta(x) \cdot \mu_\sigma) \otimes \eta$ induit, pour tout η comme ci-dessus, des spécialisations $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \to H^1(\mathbf{Q}_p, V(\eta))$.

2.2.4 (φ,Γ)-modules

Un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{A}\in\{\mathscr{E},\mathscr{E}^\dagger,\mathscr{R}\}$ est un $\mathscr{A}$-module libre D de rang fini muni d'actions continues semi-linéaires de Γ et φ tel que $\varphi(D)$ engendre D comme $\mathscr{A}$-module. L'intérêt des ces objets réside dans le théorème suivant

Théorème 2.2.2 (Fontaine, Cherbonier-Colmez, Kedlaya)**.** *La catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{A}$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

Si $V\in\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on notera $\mathbf{D}(V)$, $\mathbf{D}^\dagger(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ les (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ qui lui sont associés par le théorème. On peut se demander comment retrouver les différents invariants arithmétiques de la représentation à partir de son (φ,Γ)-module. Voici quelques exemples déjà classiques.

Théorème 2.2.3 ([38])**.** *Soient $V\in\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et γ un générateur topologique de Γ* [2]*. Alors le complexe*

$$0\to\mathbf{D}(V)\xrightarrow{x\mapsto((1-\varphi)x,(1-\gamma)x)}\mathbf{D}(V)\oplus\mathbf{D}(V)\xrightarrow{(x,y)\mapsto(1-\gamma)x-(1-\varphi)y}\mathbf{D}(V)\to 0$$

calcule la cohomologie galoisienne de V.

Théorème 2.2.4 ([7])**.** *Soit $V\in\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Alors*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)=(\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t])^\Gamma,$$

où $t=\log(1+T)$ dénote le $2i\pi$ de Fontaine. De plus, si V est à poids de Hodge-Tate négatifs, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)=\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^\Gamma$

Théorème 2.2.5 ([13])**.** *Si $V\in\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, la cohomologie du complexe*

$$[\mathbf{D}(V)\xrightarrow{1-\psi}\mathbf{D}(V)]$$

calcule les groupes de cohomologie d'Iwasawa de V. En particulier, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Exp}^*:H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,V)\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}(V)^{\psi=1}.$$

2.2.5 La loi de réciprocité de Cherbonnier-Colmez

Soient $V\in\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et $\mu\in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,V)$. L'élément $\mathrm{Exp}^*(\mu)$ appartient à $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}=\mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}$ et il est donc surconvergent. On a, pour n assez grand, $\varphi^{-n}(\mathrm{Exp}^*(\mu))\in(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}}$. Les traces de Tate normalisées $\lim_{m\to\infty}p^{-m}\mathrm{Tr}_{L_m/L_n}x$

2. Si $p=2$, il faut considérer $\Gamma'\subseteq\Gamma$ la p-partie du sous-groupe de torsion de Γ, $\gamma\in\Gamma$ dont l'image dans le quotient Γ/Γ' soit un générateur topologique, et prendre les invariants par Γ' dans tous les modules de la suite ci-dessous.

permettent de descendre cet élément à $L_n((t)) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, pour n'importe quel $n \in \mathbf{N}$, et on a le résultat suivant :

Théorème 2.2.6 (cf. [13], thm. IV.2.1)**.** *Soient $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de Rham, $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors $p^{-m}\mathrm{Tr}_{L_m/L_n}(\varphi^{-m}\,\mathrm{Exp}^*(\mu))$ ne dépend pas de m assez grand et on a*

$$p^{-m}\mathrm{Tr}_{L_m/L_n}(\varphi^{-m}\mathrm{Exp}^*(\mu)) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \exp^*_{V(-j),F_n}\left(\int_{\Gamma_n} \chi(x)^{-j}\mu\right).$$

De plus, il existe $m(V)$ tel que, pour $n \geq m(V)$ et m assez grand, on une l'égalité $p^{-m}\mathrm{Tr}_{L_m/L_n}(\varphi^{-m}\mathrm{Exp}^*(\mu)) = p^{-n}\varphi^{-n}(\mathrm{Exp}^*\mu)$.

2.2.6 La loi de réciprocité de Perrin-Riou

Soit $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ une représentation cristalline et soit $h \geq 1$ un entier tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V})$. L'action de Γ sur $\mathscr{R}$ s'étend en une action de l'algèbre de distributions $\mathscr{D}(\Gamma) = \mathscr{R}^+(\Gamma)$ [3]. Soit

$$\nabla = \frac{\log(\gamma)}{\log_p(\chi(\gamma))} \in \mathscr{R}^+(\Gamma).$$

On a aussi l'égalité $\nabla = t(1+T)\frac{d}{dT}$ d'opérateurs.

Si $v_1, \ldots, v_d$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(v)$ et $z = \sum_{i=1}^d f_i \otimes v_i \in (\mathscr{R}^+ \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$, alors

$$\nabla_h \cdot z = (\nabla - (h-1)) \circ \ldots \circ (\nabla - 1)\nabla(z) = \sum_{i=1}^d t^h \partial^h f_i \otimes d_i$$

et, si $h \geq 1$ est tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\,\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V})$, cet élément appartient à $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V) \subseteq \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] \cong \mathscr{R}[1/t] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Ceci induit une application (cf. [8])

$$\nabla_h : (\mathscr{R}^+ \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1} \to \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1},$$

$$z \mapsto \nabla_h z.$$

L'isomorphisme Exp^* s'étend (cf. [54], voir aussi 3.2.8 plus loin) en un isomorphisme

$$\mathrm{Exp}^* : H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V})^{\psi=1},$$

dont on note $z \mapsto \mu_z$ l'application inverse. Ceci permet de définir (voir aussi [8], prop. 1.8),

3. Si γ un générateur topologique de Γ, on définit l'anneau $\mathscr{R}^+(\Gamma)$ de la même manière que $\mathscr{R}^+$ en remplaçant T par $\gamma - 1$.

pour $j \in \mathbf{Z}$ et $n \geq 0$, des applications de spécialisation

$$\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1} \to \otimes H^1(F_n, V(j)) : z \mapsto \int_{\Gamma_n} \chi^j \cdot \mu_z.$$

En termes des distributions, on a

$$(\mathrm{Exp}^*)^{-1} \circ \nabla_h : \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1} \to H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V)),$$

où on fait agir ψ sur une distribution par la formule $\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)\psi(\mu) = \varphi^{-1}(\int_{p\mathbf{Z}_p} f(x/p)\mu)$. Le théorème 2.2.7 ci-dessous montre que cette composée permet de retrouver l'application de périodes de Perrin-Riou ([52]).

Si $z \in \mathscr{R}^+ \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $n \geq 0$, on note $[\varphi^{-n}z]_0 \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ le coefficient de indépendant de la série $\varphi^{-n}z$ en t, image de z par l'application

$$\varphi^{-n} : \mathscr{R}^+ \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V); \quad T \mapsto \zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1.$$

Enfin, notons

$$\Gamma^*(j+1) = \begin{cases} j! & \text{si } j \geq 0 \\ \frac{(-1)^{j-1}}{(-j-1)!} & \text{si } j < 0 \end{cases}$$

le coefficient principal de la série de Laurent de la fonction $\Gamma(s)$ en $s = j+1$.

Théorème 2.2.7 ([8], thm. II.10). *Soit $z \in (\mathscr{R}^+ \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$. Si $h + j \geq 1$, et $z_j \in (\mathscr{R}^+ \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=p^{-j}}$ est tel que $\partial^j z_j = z$, on a*

$$\int_{\Gamma_n} \chi(x)^j \cdot \mu_{\nabla_h z} = \frac{p^{n(j-1)}}{\Gamma^*(-j-h+1)} \cdot \begin{cases} \exp_{V(j),F_n}([\varphi^{-n}(z_j)]_0 \otimes t^{-j} e_j), & \text{si } n > 0 \\ \exp_{V(j),\mathbf{Q}_p}((1 - p^{-1}\varphi^{-1})[z_j]_0 \otimes t^{-j} e_j) & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

et, si $j \leq -h$,

$$\exp^*_{V(-j),F_n}(\int_{\Gamma_n} \chi(x)^j \cdot \mu_{\nabla_h z}) = \frac{p^{n(j-1)}}{\Gamma^*(-j-h+1)} \cdot \begin{cases} [\varphi^{-n}(\partial^{-j} z)]_0 \otimes t^{-j} e_j, & \text{si } n > 0 \\ (1 - p^{-1}\varphi^{-1})[\partial^{-j} z]_0 \otimes t^{-j} e_j & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On aura besoin du lemme suivant

Lemme 2.2.8 ([8], lemme II.1). *Soient $z \in (\mathscr{R}^+[1/t] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$ et $n, m \geq 0$ des entiers. On a l'égalité suivante dans $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$:*

$$p^{-m} \mathrm{Tr}_{L_m/L_n} [\varphi^{-m} z]_0 = \begin{cases} p^{-n}[\varphi^{-n}(z)]_0, & \text{si } n > 0 \\ (1 - p^{-1}\varphi^{-1})[z]_0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

En particulier, le terme de gauche ne dépend pas de $m \gg 0$.

2.3 La fonction L locale

2.3.1 Distributions à valeurs dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$

Soit V $\in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension d, cristalline et *à poids de Hodge-Tate négatifs* et soit $D = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V) \subseteq \mathscr{R} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V})$ son (φ, Γ)-module sur $\mathscr{R}$ associé. Supposons que le Frobenius cristallin agit de manière semi-simple et soit $(v_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ sur L constituée de vecteurs propres du Frobenius dont on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ les valeurs propres correspondantes. On voit, en utilisant le thm. 2.2.4, la base $(v_i)_{1 \leq i \leq d}$ comme une famille génératrice de D sur $\mathscr{R}$[4].

Soient $f_i \in \mathscr{R}^+$, $1 \leq i \leq d$. Par le théorème d'Amice, il existe des distributions $\lambda_i \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$ telles que $\mathscr{A}(\lambda_i) = f_i$. Considérons l'élément $z = \sum_{i=1}^d \mathscr{A}_{\lambda_i} \otimes v_i \in \mathscr{R}^+ \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subseteq D$. On note $\lambda \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))$ la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ définie par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \cdot \lambda = \sum_{i=1}^d (\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \cdot \lambda_i) \cdot v_i$, et on dit que z est la transformée d'Amice de λ. Si les λ_i appartiennent à $(\mathscr{R}^+)^{\psi=0}$, on dit que la distribution λ est à support dans $\mathbf{Z}_p^\times$. Remarquons finalement que la condition $z \in D^{\psi=1}$ se traduit par $\psi(\lambda_i) = \alpha_i \lambda_i$ pour tout $i = 1, \ldots, d$.

Rappelons que l'on dispose d'un isomorphisme $\mathrm{Exp}^* : H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V)) \xrightarrow{\sim} D^{\psi=1}$, de sorte qu'à toute distribution $\lambda \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$ lui correspond un élément $\mu = (\mathrm{Exp}^*)^{-1} \mathscr{A}_\lambda \in H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V))$. Observons que $(1 - \varphi)\mathrm{Exp}^* \mu = (1 - \varphi) \sum_i \mathscr{A}_{\lambda_i} \cdot v_i = \sum_i (1 - \varphi \alpha_i) \lambda_i \cdot v_i = \sum_i \mathscr{A}_{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^\times} \lambda_i} \cdot v_i$ (car $\psi(\lambda_i) = \alpha_i \lambda_i$) correspond alors à la restriction à $\mathbf{Z}_p^\times$ de λ.

2.3.2 Bases et modules de de Rham

On aura besoin, dans les sections suivantes (et dans le reste de la thèse), de comparer des éléments vivant dans les modules de de Rham des tordues d'une représentation par des caractères de la forme $\eta \chi^j \in \mathfrak{X}$, où $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ est un caractère d'ordre fini et $j \in \mathbf{Z}$. Pour ce faire, il s'avère utile de fixer certaines bases des modules $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(L(\eta \chi^j))$ de sorte de pouvoir transférer aisément des éléments entre ces différents modules.

Rappelons que, si $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ est d'ordre fini, $G(\eta)$ dénote sa somme de Gauss et $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, alors $\sigma_a(G(\eta)) = \eta(a)^{-1} G(\eta)$ et, si e_η dénote une base de $L(\eta)$, le groupe Γ (et donc aussi $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$) agit trivialement sur l'élément $\mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}} = G(\eta) \cdot e_\eta \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes L(\eta)$ et est donc une base du L-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(L(\eta))$. Si $j \in \mathbf{Z}$, on a déjà vu qu'il est de même de $\mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} = t^{-j} e_j \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes L(\chi^j)$. Notons

$$\mathbf{e}_{\eta,j} = e_\eta \otimes e_j,$$

4. Les calculs suivants marchent, plus généralement, sans hypothèses sur les poids de Hodge-Tate, soit en tordant convenablement, soit en tenant compte des puissances de t dans l'isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] \cong \mathscr{R}[1/t] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Mais cette hypothèse simplifie un peu la situation, permettant toute de même de montrer les idées qui apparaitront plus tard dans le cas de Rham.

qui est une base de $L(\eta\chi^j)$, de sorte que l'élément

$$\mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}} = \mathbf{e}_{\eta}^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_{j}^{\mathrm{dR}} = G(\eta)t^{-j} \cdot \mathbf{e}_{\eta,j} = G(\eta)e_\eta \otimes t^{-j}e_j$$

constitue une base du module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(L(\eta\chi^j))$.

Si $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est de Rham, alors $V(\eta\chi^j)$ l'est aussi et on a, par ce qui précède,

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(\eta\chi^j)) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V \otimes L(\eta\chi^j))^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} \otimes L \cdot \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}} = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes L \cdot \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}}.$$

L'application $x \mapsto x \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}}$ induit donc un isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(\eta\chi^j))$.

Enfin, on note $e_\eta^\vee = e_{\eta^{-1}}$, $e_j^\vee = e_{-j}$ les éléments duaux, respectivement, de e_η et e_j, ainsi que

$$\mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1} \cdot e_\eta^\vee \otimes t^j e_j^\vee,$$

base du module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(L(\eta^{-1}\chi^{-j}))$. L'application $x \mapsto x \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee}$ induit un isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(\eta\chi^j)^*) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et on a $x \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee} = x$ pour tout $x \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

2.3.3 Interpolation des exponentielles duales

Soit $V \in \mathrm{Rep}\, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ une représentation cristalline. Le module d'Iwasawa (analytique) $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V))$ est isomorphe à $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$ et ce dernier s'exprime, grâce au théorème 2.2.4, en termes de distributions à valeurs dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Le but de ce qui reste du chapitre est de décrire le lien entre la théorie d'Iwasawa (côté $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$ ou bien $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V))$), les applications de localisation (côté $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$) et l'analyse fonctionnelle p-adique (côté distributions).

Lemme 2.3.1. *Soient $\mu \in H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V))$, η un caractère constant modulo p^n et $m \geq n$. On a alors l'égalité suivante (dans $L_n \otimes H^1(\mathbf{Q}_p, V(-j))$)*

$$\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu = \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)a^{-j} \cdot (\int_{\Gamma_m} \chi^{-j} \cdot \sigma_a(\mu)).$$

De plus, si V est de Rham, on a une égalité (dans $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(-j))$)

$$\exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu) \otimes \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)a^{-j} \exp^*(\int_{\Gamma_m} \chi^{-j} \cdot \sigma_a(\mu)).$$

Démonstration. En utilisant la décomposition $\Gamma = \sqcup_{\sigma_a \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \sigma_a \cdot \Gamma_m$, le fait que η est constant sur Γ_n, et la formule pour l'action de Γ sur $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, \mathrm{V})$, on a

$$\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu \quad = \quad \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a) \int_{\sigma_a \cdot \Gamma_m} \chi(x)^{-j} \cdot \mu$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a) \int_\Gamma \mathbf{1}_{\sigma_a\cdot\Gamma_m}(x)\chi(x)^{-j}\cdot\mu \\
&= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)a^{-j} \int_\Gamma \mathbf{1}_{\Gamma_m}(\sigma_a^{-1}x)\chi(\sigma_a^{-1}x)^{-j}\cdot\mu \\
&= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)a^{-j} \int_{\Gamma_m} \chi^{-j}\cdot\sigma_a(\mu).
\end{aligned}$$

La deuxième assertion est une conséquence de la formule, pour $W = V(\eta\chi^{-j}), V(j)$, $L = \mathbf{Q}_p, F_n$, de $\exp^*$ comme la composition

$$H^1(L,W) \to H^1(L, W\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \xrightarrow{\sim} H^0(L, W\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(W)\otimes L,$$

l'inverse du dernier isomorphisme étant donnée par $x\mapsto[\sigma\mapsto\log\sigma x]$, cf. 3.3.8 pour une démonstration dans le cas de Rham. $\square$

Lemme 2.3.2. *Soient* $\lambda = \sum_{i=1}^d \lambda_i\cdot v_i \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$ *et* $z = \mathscr{A}_\lambda \in \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$. *Soient* η *un caractère de Dirichlet de conducteur* p^n, $n>0$, *et* $m\geq 0$. *Alors*

1. *Si* $m<n$, *on a*
$$\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a(\left[\partial^j\varphi^{-m}z\right]_0) = 0,$$
2. *Si* $m\geq n$, *on a*
$$\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \frac{\eta(a)}{p^m}\sigma_a(\left[\partial^j\varphi^{-m}z\right]_0) = \frac{G(\eta)}{p^{n(j+1)}}\sum_{i=1}^d\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^\times}\eta^{-1}x^j\cdot\lambda_i\Big)\alpha_i^{-n}\cdot v_i,$$
et, en particulier, la formule ne dépend pas de $m\geq n$.

Démonstration. Si $l=\sup\{n,m\}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^l\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a(\left[\partial^j\varphi^{-m}z\right]_0) &= \sum_{i=1}^d \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^l\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a([\partial^j\int_{\mathbf{Z}_p}\zeta_{p^m}^x e^{\frac{tx}{p^m}}\cdot\lambda_i]_0)\cdot\alpha_i^{-m}v_i \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{1}{p^{mj}}\int_{\mathbf{Z}_p}\Big(\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^l\mathbf{Z})^\times}\eta(a)\zeta_{p^m}^{ax}\Big)x^j\cdot\lambda_i\cdot\alpha_i^{-m}v_i
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^l\mathbf{Z})^\times}\eta(a)\zeta_{p^m}^{ax} = p^l\hat\eta(-p^{-m}x)$. On déduit le point (1) du fait que $\hat\eta$ est à support dans $p^{-n}\mathbf{Z}_p^\times$ et donc $\hat\eta(\frac{-x}{p^m}) = 0$ sur $\mathbf{Z}_p$. En ce qui concerne la deuxième affirmation, si $l=m\geq n$, on a

$$\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a(\left[\partial^j\varphi^{-m}z\right]_0) = \sum_{i=1}^d\frac{p^m}{p^{mj}}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p}\hat\eta(\frac{-x}{p^m})x^j\cdot\lambda_i\Big)\cdot\alpha_i^{-m}v_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{p^m}{p^{mj}} \frac{\eta^{-1}(-1)}{G(\eta^{-1})} (\int_{p^{m-n}\mathbf{Z}_p^\times} \eta^{-1}(\frac{x}{p^{m-n}}) x^j \cdot \lambda_i) \cdot \alpha_i^{-m} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{p^{m-n} G(\eta)}{p^{nj}} (\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta^{-1}(x) x^j \cdot \psi^{m-n}(\lambda_i)) \cdot \alpha_i^{-m} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{p^{m-n} G(\eta)}{p^{nj}} (\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta^{-1} x^j \cdot \lambda_i) \cdot \alpha_i^{-m} v_i,
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé successivement les identités

$$\hat{\eta}(-\frac{x}{p^m}) = \frac{\eta^{-1}(-1)}{\mathrm{G}(\eta^{-1})} \mathbf{1}_{p^{m-n}\mathbf{Z}_p^\times}(x) \eta^{-1}(\frac{x}{p^{m-n}}),$$

$$G(\eta)G(\eta^{-1}) = \eta(-1)p^n,$$

$$\psi^{m-n}(\lambda_i) = \alpha_i^{m-n}\lambda.$$

□

Proposition 2.3.3. *Soient $\lambda \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$, $z = \mathscr{A}_\lambda \in \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$ et $\mu = (\mathrm{Exp}^*)^{-1} z \in H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V))$. Soient η un caractère de conducteur p^n, $n > 0$, et $j > 0$. On a alors une égalié entre les trois éléments de $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ suivants*

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma^*(j+1)}{p^{n(-j+1)}} \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu) \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee} &= G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\partial^j(1-\varphi)z]_0 \\
&= \sum_{i=1}^{d} (\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta^{-1} x^j \cdot \lambda_i) \cdot \alpha_i^{-n} v_i
\end{aligned}
$$

Démonstration. Une application du lemme 2.3.1 et de la loi de réciprocité explicite de Cherbonnier-Colmez 2.2.6 donne

$$
\begin{aligned}
\exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu) \otimes \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR},\vee} &= G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a) a^{-j} \exp^*(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot \sigma_a(\mu)) \\
&= G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a) a^{-j} \left[p^{-m} \mathrm{Tr}_{L_m/L_n} \varphi^{-m} \mathrm{Exp}^*(\sigma_a \mu)\right]_j \\
&= G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \frac{\eta(a)}{j! p^m} \mathrm{Tr}_{L_m/L_n} \sigma_a \left[\partial^j \varphi^{-m} z\right]_0 \otimes t^j e_{-j},
\end{aligned}
$$

où $m \in \mathbf{N}$ est un entier assez grand. Or, on a (cf. lemme 2.2.8)

$$\sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \frac{\eta(a)}{j! p^m} \mathrm{Tr}_{L_m/L_n} \sigma_a \left[\partial^j \varphi^{-m} z\right]_0 = \begin{cases} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \frac{\eta(a)}{j! p^n} \sigma_a \left[\partial^j \varphi^{-n} z\right]_0, & \text{si } n > 0 \\ (1 - p^{-1}\varphi^{-1})[z]_0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

En utilisant le (2) du lemme 2.3.2 ci-dessus (avec $m = n$), on obtient

$$\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})} \frac{\eta(a)}{j!p^n}\sigma_a \left[\partial^j \varphi^{-n} z\right]_0 = \frac{\mathrm{G}(\eta)}{j!p^{n(j+1)}} \sum_{i=1}^{d}(\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta^{-1}x^j \cdot \lambda_i) \cdot \alpha_i^{-n} v_i.$$

Notons finalement que, par le (1) du lemme 2.3.2, le terme de gauche de la formule ci-dessus ne change pas si l'on remplace z par $(1-\varphi)z$, ce qui permet de conclure.

□

Remarque 2.3.4. Comme l'on observe dans la démonstration, on peut aussi modifier un peu les formules pour traiter le cas où η est le caractère trivial (qui s'avère en fait très important), mais vu que notre méthode ne nous permet pas de traiter ce cas en général, on l'ignore pour le moment.

2.3.4 Interpolation des exponentielles

Le même genre de calculs permettent de traiter le cas des puissances positives de χ. Dans le lemme suivant on ne fait pas d'hypothèse sur les poids de Hodge-Tate de V.

Proposition 2.3.5. *Soient* V *une représentation cristalline et h tel que* $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V})$. *Soient $\lambda \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$, $z = \mathscr{A}_\lambda \in \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$ et $\mu = (\mathrm{Exp}^*)^{-1}z \in H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V))$. Soient $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère de conducteur p^n, $n > 0$, et $j \geq 1-h$ tel que l'équation $\partial^j z_j = \mathscr{A}_\lambda$ ait une solution et tel que* $\exp : \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(j)) \to H^1(\mathbf{Q}_p, V(j))$ *soit un isomorphisme. On a alors une égalié entre les trois éléments de $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ suivants*

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma^*(-j-h+1)}{p^{n(-j+1)}} \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_{\nabla_h z}) \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee} &= \mathrm{G}(\eta)^{-1} \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\partial^{-j}(1-\varphi)z]_0 \\ &= \sum_{i=1}^{d}(\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \eta^{-1}x^{-j} \cdot \lambda_i) \cdot \alpha_i^{-n} v_i\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de reproduire les mêmes calculs que dans la preuve de la proposition 2.3.3, et utiliser la loi de réciprocité explicite 2.2.7 de Perrin-Riou. Une démonstration détaillée dans le cas de Rham est faite dans la proposition 3.3.10. □

Finalement, on peut résumer les résultats de cette section dans la proposition suivante. Notons

$$\log(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu) = \begin{cases} \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu) & \text{si } j \geq 0 \\ \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu) & \text{si } j \ll 0. \end{cases}$$

Proposition 2.3.6. *Soient V une représentation cristalline de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à poids de Hodge-Tate négatifs. Soient $\lambda \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$, $z = \mathscr{A}_\lambda \in \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$ et $\mu = (\mathrm{Exp}^*)^{-1}z \in$*

$H^1(\mathbf{Q}_p, \mathscr{D}(\Gamma, V))$ et soit η un caractère de conducteur p^n, $n \geq 1$. L'application

$$\eta\kappa \mapsto \Lambda_{V,\mu}(\eta\kappa) = \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\kappa(\partial)(1-\varphi)z]_0$$

ne dépend pas de η et définit une fonction analytique $\Lambda_{V,\mu} \in \mathcal{O}(\mathfrak{X}) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ telle que, si $j \in \mathbf{Z}$ est tel que $j \geq 0$ ou $j \ll 0$, alors

$$\Lambda_{V,\mu}(\eta\chi^j) = \Gamma^*(j+1)p^{n(j+1)} \cdot \log(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu) \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee}$$

Démonstration. La proposition est une conséquence immédiate des propositions 2.3.3 et 2.3.5. Notons que l'indépendance de η, ainsi que le fait que $\Lambda_{V,\mu}$ définit une fonction analytique sur tout l'espace des poids, suit du fait que l'on peut tout écrire en terme de la distribution λ, comme on le voit dans les égalités de droite des propositions. $\square$

Chapitre 3

Le cas de Rham

Le présent chapitre contient le premier résultat principal de cette thèse, qui s'encadre dans l'étude des fonctions L p-adiques d'un (φ, Γ)-module de de Rham associées à un système d'Euler, comme démarré par Perrin-Riou ([52]). On construit (thm. 3.3.14) un prolongement analytique de l'application de périodes de Perrin-Riou d'un (φ, Γ)-module D de Rham sur $\mathscr{R}$, fournissant, à partir d'un système compatible de classes de cohomologie, une fonction L p-adique. On finit (section 3.4) en étudiant le lien entre cette fonction et l'accouplement d'Iwasawa sur les (φ, Γ) modules comme défini dans [22]. On construit (lemme 3.4.4), à partir de cet accouplement et du choix d'un élément supplémentaire, une fonction analytique sur l'espace de poids et on montre, en utilisant une loi de réciprocité, que cette fonction satisfait une équation fonctionnelle particulièrement simple (prop. 3.4.8).

3.1 Résultat principal

Si $\xi, \delta \in \mathfrak{X}$ sont deux caractères, leur distance est définie par $v_p(\xi - \delta) = v_p(z_\xi - z_\delta)$, où z_ξ, $z_\delta \in B(1, 1^-)$ sont comme dans 1.1.4 [1]. Si $\eta \in \mathfrak{X}$ est un caractère d'ordre, on note $\mathrm{c}(\eta)$ la puissance de p de son conducteur (de sorte que $\mathrm{cond}(\eta) = p^{\mathrm{c}(\eta)}$), et, pour $N \geq -\infty$, on définit

$$\mathfrak{B}(\eta, N) = \{\xi \in \mathfrak{X} \mid v_p(\xi - \eta) > p^{N - \mathrm{c}(\eta)}\} \subseteq \mathfrak{X}.$$

Rappelons que $\Gamma^*(j)$ dénote le coefficient principal de la série de Laurent de la fonction $\Gamma(s)$ en $s = j$ et que l'on a défini une application $\log : H^1(\mathbf{Q}_p, V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ en fonction des applications exp et $\exp^*$. Le résultat principal de ce chapitre est alors le suivant

Théorème 3.1.1. *Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ de Rham à poids de Hodge-Tate positifs, $z \in D^{\psi=1}$, et notons $\mu_z = \mathrm{Exp}^*(z) \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D)$. Il existe un entier $N(D)$ [2], et une unique fonction*

1. On pourrait aussi définir la distance entre $\xi, \delta \in \mathfrak{X}$ comme $v_p(\xi - \delta) = v_p(z_\xi - z_\delta)$ si $\xi|_{(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times} = \delta|_{(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times}$ et $v_p(\xi - \delta) = -\infty$ si non.

2. L'entier $N(D)$ ne dépend que du module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(D)$ et est borné en termes du conducteur de la plus petite extension galoisienne K de $\mathbf{Q}_p$ tel que l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(D)$ se factorise à travers $\mathscr{G}_K$. Si

rigide analytique $\Lambda_{D,z} \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_D) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$*, où l'on a posé* $\mathfrak{U}_D = \cup_{\mathrm{c}(\eta)>m(\Delta)} \mathfrak{B}(\eta, N(D))$*, telle que, pour tout* $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_D$*, où* η *est un caractère d'ordre fini et* $j \in \mathbf{Z}$ *est tel que* $j \geq 0$ *ou* $j \ll 0$ [3]*, on a*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = \Gamma^*(j+1)p^{n(j+1)} \cdot \log\left(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z\right) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j}.$$

Voici quelques remarques :

- On obtiendra ce théorème (thm. 3.3.14) comme conséquence d'un résultat plus général énoncé dans le théorème 3.3.3.
- Si $\mathrm{c}(\eta) > N$, l'ouvert $\mathfrak{B}(\eta, N)$ contient tous les caractères de la forme $\eta\chi^j$, $j \in \mathbf{Z}$, $j \equiv 0 \mod q$, ce qui implique que la fonction $\Lambda_{D,z}$ est unique
- Si D est de la forme $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ pour une représentation cristalline V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors l'application $\Delta_{D,z}$ provient par restriction d'une fonction rigide analytique définie sur tout l'espace des poids $\mathfrak{X}$, et coïncide avec celle construite dans la proposition 2.3.6.
- Comme corollaire de ce théorème, on obtiendra une construction partielle de la fonction L p-adique associée à un système d'Euler d'un (φ, Γ)-module de de Rham. Si $D = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ est le (φ, Γ)-module associé à la représentation p-adique d'une forme modulaire, on verra comment ces valeurs s'interprètent en termes de valeurs spéciales de la fonction L complexe de la forme modulaire.

Voici un bref résumé de ce chapitre. On commence par rappeler les outils et notations nécessaires dont on aura besoin pour la preuve du théorème. On pourra consulter [47] et [8], qui sont les références principales. La structure de la preuve du théorème 3.1.1 est la suivante : Dans la section 3.2.1, on rappelle des généralités sur les (φ, Γ)-modules de de Rham sur l'anneau de Robba. Ensuite (section 3.3.2) on étend au cas d'un (φ, Γ)-module la multiplication analytique par un caractère, le cas d'un (φ, Γ)-module trivial ayant été traité dans la section 1.2. Dans 3.3.4, on définit l'application $\Lambda_{D,z}$. Le Lemme 3.3.5 calcule le rayon de convergence de $\Lambda_{D,z}$, ce qui explique la définition de l'ouvert $\mathfrak{B}(N)$ du théorème. Les propositions 3.3.9 et 3.3.10 montrent, en utilisant la loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou comme démontrée par Nakamura, les propriétés d'interpolation de $\Lambda_{D,z}$, introduisant l'opérateur différentiel auxiliaire ∇_h dans les formules. Enfin, quand D est à poids de Hodge-Tate positifs et $z \in D^{\psi=1} \subseteq \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1}$ on se débarrasse de l'opérateur différentiel ∇_h pour obtenir ainsi l'interpolation voulue. On finit le chapitre en donnant une variante analytique de la fonction $\Lambda_{D,z}$ en termes de l'accouplement d'Iwasawa de Colmez et en montrant une équation fonctionnelle pour $\Lambda_{D,z}$ dans le cas de dimension 2.

$D = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$, où $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, la constante $N(D)$ est donc bornée en termes du conducteur de la plus petite extension $K/\mathbf{Q}_p$ sur laquelle V dévient semi-stable.

3. Plus précisément, j doit être suffisamment petit de sorte que $\exp_{D(-j)} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(-j)) \to H^1_{\varphi,\gamma}(D(-j))$ soit un isomorphisme. Il suffirait donc de demander $j < h_0 - 2$, où h_0 dénote le plus petit poids de Hodge-Tate de D (cf. [7], thm. 0.9).

3.2 Généralités sur les (φ, Γ)-modules

3.2.1 Sous-modules naturels de D

Soit $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ de rang d. L'algèbre de Lie de Γ agit sur D via l'opérateur $\mathbf{Q}_p$-linéaire

$$\nabla = \lim_{a \to 1} \frac{\sigma_a - 1}{a - 1} = \frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))} = \frac{1}{\log(\chi(\gamma))} \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^{i+1} \frac{(\gamma - 1)^i}{i},$$

où $\gamma \in \Gamma$ dénote n'importe quel élément pas de torsion dans Γ, ce qui définit un opérateur différentiel au-dessus de l'opérateur $\nabla = t(1+T)\frac{d}{dT}$ agissant sur $\mathscr{R}$.

Lemme 3.2.1 ([9], thm. I.3.3)**.** *Il existe $\varepsilon > 0$ et, pour tout $0 < s \leq \varepsilon$, des uniques sous-$\mathscr{E}^{]0,s]}$-modules $D^{]0,s]}$ de D, satisfaisant*

— *$D = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{R}^{]0,s]}} D^{]0,s]}$.*

— *$\varphi(D^{]0,s]}) \subseteq D^{]0,s/p]}$, et on a un isomorphisme $\mathscr{R}^{]0,s/p]} \otimes_{\mathscr{R}^{]0,s]}} D^{]0,s]} \to D^{]0,s/p]} : f \otimes x \mapsto f\varphi(x)$, pour tout n tel que $r_n \leq r_{m(D)}$.*

De plus, les modules $D^{]0,s]}$ sont stables par Γ et ∇.

Démonstration. Soit $v_1, \ldots, v_D$ une base de D sur $\mathscr{R}$. Soient A et B les matrices de Γ et φ dans cette base et soit ε tel que $A, B \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{E}^{]0,\varepsilon]})$. On peut voir que les sous $\mathscr{E}^{]0,s]}$-modules $D^{]0,s]} = \oplus_{i=1}^{d} \mathscr{E}^{]0,s]} v_i$ de D satisfont les propriétés du lemme. □

On définit $m(D)$ de D comme le plus petit entier tel que le lemme 3.2.1 est vrai avec $r_{m(D)} \leq \varepsilon$ et son rayon de surconvergence par $r_{m(D)}$. Pour $0 < r < s \leq r_{m(D)}$, on pose

$$D^{[r,s]} = \mathscr{E}^{[r,s]} \otimes_{\mathscr{E}^{]0,s]}} D^{]0,s]}.$$

On a

$$D = \varinjlim_{s>0} \varprojlim_{0<r<s} D^{[r,s]},$$

ce qui montre que D est un espace de type LF (i.e limite inductive d'espaces de Fréchet).

Rappelons que l'on a des morphismes de localisation $\varphi^{-n} : \mathscr{R}^{]0,r_n]} \hookrightarrow L_n[[t]]$ envoyant T sur $\zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1$. Pour $n \geq m(D)$ on définit

$$\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif},n}(D) = L_n[[t]] \otimes_{\varphi^{-n}, \mathscr{R}^{]0,r_n]}} D^{]0,r_n]},$$

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}(D) = L_n((t)) \otimes_{L_n[[t]]} \mathbf{D}^+_{\mathrm{dif},n}(D),$$

qui sont des $L_n[[t]]$ et $L((t))$-modules, respectivement, libres de rang d et munis d'une action semi-linéaire de Γ. Finalement, on définit

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D) = \varinjlim_{n} \mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}(D) \quad \mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(D) = \varinjlim_{n} \mathbf{D}^+_{\mathrm{dif},n}(D),$$

qui sont, respectivement, des $L_\infty((t)) = \cup_n L_n((t))$ et $L_\infty[[t]] = \cup_n L_n[[t]]$-modules libres de rang d.

3.2.2 Théorie de Hodge p-adique

Comme l'on a déjà remarqué, la plupart des objets de la théorie de Hodge p-adique peuvent être exprimés purement en terme des (φ,Γ)-modules. Suivant ce programme, commencé par Fontaine [32], on définit les invariants suivants.

Definition 2. Soit $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ de rang d. On définit

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(D) = (D[1/t])^\Gamma = (D \otimes_{\mathscr{R}} \mathscr{R}[1/t])^\Gamma \quad \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = (\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))^\Gamma,$$

qui sont des L-espaces vectoriels de dimension finie.

On muni $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ de sa filtration de Hodge, qui est donnée par $\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \cap t^i\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}} = (t^i\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}})^\Gamma$. On observe que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(D)$ est muni d'une action bijective du Frobenius φ ainsi que d'une filtration induite par l'inclusion $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(D) \subseteq \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ définie par $x \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(D) \mapsto \iota_n(\varphi^n(x)) \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$, où on a noté $\iota_n = \varphi^{-n} : D^{]0,r_n]}[1/t] \to \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)$ l'application de localisation [4]. On a

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(D) \leq \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \leq \mathrm{rang}_{\mathscr{R}}\, D,$$

où la première inégalité est évidente par ce qui précède et la dernière suit en remarquant que $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)$ est un $L_\infty((t))$-espace vectoriel de rang $d = \mathrm{rang}_{\mathscr{R}}\, D$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = (\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))^\Gamma$ est donc un $(L_\infty((t)))^\Gamma = L$-espace vectoriel de rang $\leq d$.

Definition 3. Soit D un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$. On dit que D est *cristallin* (resp. *de Rham*) si l'inégalité $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(D) \leq \mathrm{rang}_{\mathscr{R}}\, D$ (resp. $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \leq \mathrm{rang}_{\mathscr{R}}\, D$) est une égalité.

Si D est de Rham, on définit ses *poids de Hodge-Tate* comme les opposés des entiers où la filtration change, c'est-à-dire l'ensemble $\{-h \in \mathbf{Z} : \mathrm{Fil}^h\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)/\mathrm{Fil}^{h+1}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \neq 0\}$.

3.2.3 L'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$

Rappelons la construction de Berger (cf. [7], [9]) de l'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ associée à un (φ,Γ)-module de de Rham D sur $\mathscr{R}$.

Proposition 3.2.2 ([9], théorème III.2.3). *Soit $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ de rang d, de Rham, et, pour chaque $n \geq m(D)$, posons*

$$\mathbf{N}^{]0,r_n]}_{\mathrm{rig}}(D) = \{x \in D^{]0,r_n]}[1/t] : \ \varphi^{-m}(x) \in L_m[[t]] \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \textit{ pour tout } m \geq n\},$$

4. Il existe ici un petit abus évident en notant par φ^{-n} deux applications différentes (l'une étant l'application de localisation notée usuellement ι_n et l'autre l'inverse de l'opérateur φ agissant sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(D)$), mais cela ne devrait pas causer de problèmes de lectures.

et $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D) = \varinjlim_n \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}{}^{]0,r_n]}(D)$. *Alors,* $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ *est un* (φ,Γ)*-module sur* $\mathscr{R}$*, de rang d, qui satisfait*

— $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)[1/t] = D[1/t]$.

— $\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif},n}(\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)) = L_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ *pour tout* $n \geq m(D)$.

— $\nabla(\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)) \subseteq t\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$.

Le (φ,Γ)-module $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ ainsi obtenu est de Rham et à poids de Hodge-Tate tous nuls. Remarquons que l'on peut reconstruire D, à partir de la donnée de $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ et de la filtration de Hodge sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$, à partir de la formule

$$D = \{x \in \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)[1/t] \ : \ \varphi^{-n}(x) \in \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)) \quad \forall n \gg 0\}.$$

Ceci implique en particulier que, si les poids de Hodge-Tate de D sont négatifs (resp. positifs), alors $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ (resp. $\mathrm{Fil}^1\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = 0$), d'où $L_m[[t]]\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \subseteq \mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D))$ (resp. $\mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)) \subseteq L_m[[t]]\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D))$ et donc $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D) \subseteq D$ (resp. $D \subseteq \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$). Plus généralement, si les poids de Hodge-Tate de D sont contenus dans $[a,b]$, on a des inclusions $t^{-a}D \subseteq \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D) \subseteq t^{-b}D$. En particulier, si D est à poids de Hodge-Tate $1,k$, avec $k > 1$, on a $D \subseteq t\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D) \subseteq t^{1-k}D$.

La troisième propriété caractérisant $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ permet de définir un opérateur différentiel

$$\partial = \frac{1}{t}\nabla : \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D) \to \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D),$$

satisfaisant les identités $\partial\circ\varphi = p\,\varphi\circ\partial$ et $\partial\circ\sigma_a = a\,\sigma_a\circ\partial$. On a donc un foncteur

$$\{\ (\varphi,\Gamma)\text{-modules de de Rham sur } \mathscr{R}\} \to \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } \mathscr{R} \text{ à connexion}\}$$

$$D \mapsto \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D),$$

la dernière catégorie étant la catégorie des équations différentielles p-adiques avec une structure de Frobenius et une action de Γ. Ce foncteur est un ingrédient clé dans la preuve du théorème de monodromie p-adique (cf. [7]). Si D est un (φ,Γ)-module de de Rham sur $\mathscr{R}$, on notera $\Delta = \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$.

3.2.4 Les anneaux de Fontaine

Rappelons la construction des anneaux de Fontaine associés à une extension galoisienne finie K de $\mathbf{Q}_p$. Notons $K_n = KF_n = K(\mu_{p^n})$, $K_\infty = KF_\infty = \cup_n K_n$, $K_0 = K \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ la plus grande sous-extension de K non-ramifiée et K_0' la plus grand extension non-ramifiée de K_0 dans K_∞. Notons $\mathscr{H}_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty)$, $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.

La théorie du corps des normes (cf. [20] par exemple) permet de construire des extensions étales $\mathscr{E}_K^\dagger/\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^\dagger$ de degré $[K_\infty : F_\infty]$, munies d'une action du Frobenius φ et du groupe $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q}_p)$. Plus précisément, soit $\widetilde{\mathbf{E}} = \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathbf{C}_p = \mathbf{C}_p^\flat$ le corps basculé de $\mathbf{C}_p$, qui est un corps de caractéristique p, algébriquement clos et muni d'une valuation $v_{\mathrm{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$ pour laquelle il est complet. Notons $1 \neq \varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots) \in \widetilde{\mathbf{E}}$, et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}$, qui s'identifie à la limite projective $\varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}/\mathfrak{a}$ pour n'importe quel idéal $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ contenant p et différent de l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$. Soient $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{F}_p((\varepsilon - 1))$ et $\mathbf{E}$ la clôture séparable de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$. La théorie du corps des normes permet de montrer que $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}) \cong \mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$. Si $K/\mathbf{Q}_p$ est une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$, on pose $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}^{\mathscr{H}_K}$. On dispose d'une application bien définie et injective $\varprojlim_{x\mapsto N_{K_n/K_{n-1}}(x)} \mathscr{O}_{K_n} \to \widetilde{\mathbf{E}}^+$ d'image l'anneau des entiers $\mathbf{E}_K^+$ de $\mathbf{E}_K$, qui fournit une uniformisante $\overline{\pi}_K$ de l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ (l'image d'un système compatible $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où ω_n est une uniformisante de K_n pour n assez grand). Soit $\overline{P}(X) = X^{d_{K_\infty}} + \overline{a}_{d_{K_\infty}-1} X^{d_{K_\infty}-1} + \dots + \overline{a}_0 \in \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}[X]$, où $d_{K_\infty} = [K_\infty : F_\infty]$ et $\overline{a}_i \in \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$, le polynôme minimal de $\overline{\pi}_K$ sur $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$. Enfin, si $P \in \mathbf{Z}_p[[T]][X]$ est tel que sa réduction modulo p soit $\overline{P}(X)$, alors $\mathscr{E}_K^\dagger = \mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^\dagger[X]/P(X)$ et on note π_K l'image de X dans ce quotient, dont la réduction modulo p est $\overline{\pi}_K$.

L'anneau $\mathscr{E}_K^\dagger$ s'identifie à l'anneau des séries formelles $f(T_K) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T_K^k$, $a_k \in K_0'$, à coefficients bornés, qui convergent sur une couronne $0 < v_p(T_K) \leq r$ pour un r assez petit (qui dépend de f). On peut de la sorte définir les anneau $\mathscr{E}_K^{[r,s]}$, qui s'identifient aux séries de Laurent convergent sur la couronne $C_{[r/e,s/e]} = \{z \in \mathbf{C}_p :\ r/e \leq v_p(z) \leq s/e\}$, munis de la norme spectrale $v^{[r,s]}$, ainsi que $\mathscr{E}_K^{]0,s]}$, $\mathscr{E}_K^{\dagger,r}$, etc. En complétant $\mathscr{E}_K^\dagger$ pour la famille de normes $v^{[r,s]}$, on obtient une extension étale $\mathscr{R}_K/\mathscr{R}$ et on a

$$\mathrm{Gal}(\mathscr{R}_K/\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}) = \mathrm{Gal}(\mathscr{E}_K^\dagger/\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^\dagger) = \mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty).$$

On a un opérateur de dérivation ∂ agissant sur $\mathscr{R}_K$: si $K/\mathbf{Q}_p$ est une extension non-ramifiée, on a $T_K = T$ et $\partial f(T) = (1+T)f'(T)$ pour $f(T) \in \mathscr{R}_K$; si $K/\mathbf{Q}_p$ est ramifiée et $P \in \mathbf{Z}_p[[T]][X]$ dénote le polynôme minimal de $T_K \in \mathscr{E}_K^\dagger$ sur $\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^\dagger$ comme ci-dessus, l'identité $\partial P(T_K) = 0$ et le fait que ∂ est une dérivation donnent la formule

$$\partial T_K = -P'(T_K)^{-1}(\partial P)(T_K),$$

où, si $P = \sum f_i X^i \in \mathbf{Z}_p[[T]][X]$, $\partial P = \sum \partial f_i \cdot X^i$.

Enfin, soit $\ell_T = \log(T)$ une variable formelle et étendons les actions φ et Γ_K sur $\mathscr{R}_K$ à des actions sur $\mathscr{R}_K[\ell_T]$ par les formules

$$\varphi(\ell_T) = p\ell_T + \log(\varphi(T)/T^p), \quad \gamma(\ell_T) = \ell_T + \log(\gamma(T)/T).$$

La dérivation ∂ agit sur ℓ_T par $\partial \ell_T = T^{-1}\partial T = 1 + T^{-1}$. On définit un opérateur de monodromie sur $\mathscr{R}_K[\ell_T]$ comme la dérivation $\mathscr{R}_K$-linéaire N telle que $N(\ell_T) = -p/(p-1)$.

3.2.5 Théorème de monodromie p-adique et surconvergence

Soit

$$\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}} \subseteq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$$

la différente de l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ et posons $\delta_K = d_{K_\infty} \cdot v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}}) \in \mathbf{N}$, où $d_{K_\infty} = [\mathbf{E}_K : \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}] = [K_\infty : F_\infty]$ comme plus haut. Rappelons (cf. [20], prop. 4.12) que, si $c(K)$ dénote le conducteur de K [5] et $n \geq c(K)+1$ est un entier, alors $[K_n : F_n] = d_{K_\infty}$ et $\delta_K = d_{K_\infty} \cdot p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})$. En particulier, si K a suffisamment de racines de l'unité, dans la terminologie de [25], alors $v_K = [K : \mathbf{Q}_p] \cdot v_p(\mathfrak{d}_{K/\mathbf{Q}_p})$. On aura besoin des faits suivants :

Lemme 3.2.3 ([25], lemme 2.17 et lemme 2.14)**.** *Si $s < (\delta_K+1)^{-1}$, alors $\partial T_K \in T^{-\delta_K} \mathscr{O}^\times_{\mathscr{E}_K^{\dagger,r}}$ et on a $v^{[r,s]}(\partial T_K) \geq -1$ pour tout $0 < r < s$.*

D'après le théorème de monodromie p-adique (cf. [9], thm. III.2.1), il existe une extension galoisienne finie K de $\mathbf{Q}_p$ tel que l'on a un isomorphisme

$$\mathscr{R}_K[\ell_T] \otimes_{K_0} (\mathscr{R}_K[\ell_T] \otimes_{\mathscr{R}} \Delta)^{\Gamma_K} \cong \mathscr{R}_K[\ell_T] \otimes_{\mathscr{R}} \Delta,$$

où l'on rappelle que $\Delta = \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$. On note $D_{\mathrm{pst}} = (\mathscr{R}_K[\ell_T] \otimes_{\mathscr{R}} \Delta)^{\Gamma_K}$ l'espace des Γ_K-solutions de Δ. C'est un $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p))$-module filtré (la filtration dépend de la donnée de D). Le résultat suivant permet de reconstruire Δ à partir de D_{pst}.

Proposition 3.2.4 (cf. [9], Thm III.2.1 ou Thm. C)**.** *Soient D et D_{pst} comme ci-dessus. Si K est une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$ telle que $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit sur D_{pst} à travers $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$, alors*

$$\Delta = (\mathscr{R}_K[\ell_T] \otimes_{K_0} D_{\mathrm{pst}})^{\mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty), N=0},$$

le groupe $\mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty)$ agissant sur D_{pst} à travers $\mathrm{Gal}(K/(K \cap F_\infty)) \subseteq \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$, et sur $\mathscr{R}_K$ à travers $\mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty) = \mathrm{Gal}(\mathscr{R}_K/\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p})$ (il agit trivialement sur l'élément ℓ_T).

On récupère l'action de Γ via l'action résiduelle du groupe Γ_K sur le module Δ, l'action de φ via son action (diagonale) sur le produit tensoriel et l'action de l'opérateur ∂ à travers celle sur $\mathscr{R}_K[l_K]$. Le lemme suivant sera très utile pour nos constructions futures.

Lemme 3.2.5. *Il existe, pour tout $0 < s < (\delta_K+1)^{-1}$, des sous-$\mathscr{E}^{]0,s]}_{\mathbf{Q}_p}$-modules $\Delta^{]0,s]}$ de Δ, munis d'une famille de valuations $(v^{[r,s]})_{0<r<s}$, satisfaisant les conditions du lemme 3.2.1, et de sorte que, pour tout $0 < r < s$, la norme $v^{[r,s]}$ de l'opérateur ∂ sur $\Delta^{]0,s]}$ soit $\geq -s-2$.*

Démonstration. Débarrassons-nous d'abord de l'opérateur N. Le module $M = K_0[\ell_T] \otimes_{K_0} D_{\mathrm{pst}}$ est un $K_0[\ell_T]$-module libre de rang d muni d'une action de $G = \mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty)$ (agissant sur le facteur de droite) et de N (agissant diagonalement) et on affirme qu'il contient

5. Le conducteur de K est la borne inférieure de l'ensemble des t tels que le groupe de ramification supérieure $\mathscr{G}^{(t)}_{\mathbf{Q}_p}$ agit trivialement sur K.

un système libre de générateurs $w_1, \dots, w_d$ tués par N. En effet, notons $\alpha = -\frac{p}{p-1}$ la valeur de N sur ℓ_T et posons, pour $v_1, \dots, v_d$ une base quelconque de D_{pst},

$$w_i = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{-k}}{k!} \ell_T^k \otimes N^k v_i,$$

qui est une somme finie car N est nilpotent. Alors les w_i sont par construction tués par N et ils forment un système libre de générateurs de M, car l'opérateur $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{\alpha^{-k}}{k!} \ell_T^k \otimes N^k$ est inversible, N étant nilpotent. Le module $W = (K_0[\ell_T] \otimes D_{\mathrm{pst}})^{N=0}$ est donc un K_0-espace vectoriel de dimension d, muni d'une action de G, et on a

$$K_0[\ell_T] \otimes_{K_0} W = K_0[\ell_T] \otimes_{K_0} D_{\mathrm{pst}}.$$

Soit $v_1, \dots, v_d$ une base de D_{pst} de sorte que la matrice de l'opérateur N soit à coefficients entiers [6], et soient $w_1, \dots, w_d$ les éléments formant une base de W fournis par le paragraphe précédent. Posons, pour $0 < s < (\delta_K + 1)^{-1}$,

$$\Delta^{]0,s]} = (\mathscr{E}_K^{]0,s]} \otimes W)^G \subseteq \mathscr{E}_K^{]0,s]} \otimes W \subseteq \mathscr{R}_K \otimes W.$$

On a $G \cong \mathrm{Gal}(\mathscr{R}_K/\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p})$, et le théorème de Hilbert 90 implique que $H^1(G, \mathrm{GL}_d(\mathscr{R}_K)) = 1$. Le module W est donc $\mathscr{R}_K$-admissible au sens de Fontaine et on a un isomorphisme

$$\mathscr{R}_K \otimes_{\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}} (\mathscr{R}_K \otimes_{K_0} W)^G \cong \mathscr{R}_K \otimes_{K_0} W$$

de $\mathscr{R}_K$-modules topologiques de rang d munis d'une action de G, induit par $f \otimes (g \otimes x) \mapsto fg \otimes x$, et qui est compatible avec les structures présentes sur $\mathscr{R}_K$. Cela veut dire que le $\mathscr{R}$-module $(\mathscr{R}_K \otimes_{K_0} W)^G$ est de dimension d.

Si $r < (\delta_K + 1)^{-1}$, alors $\mathscr{R}_K = \mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{]0,s]}} \mathscr{E}_K^{]0,s]}$ [7], d'où

$$(\mathscr{R}_K \otimes_{K_0} W)^G = (\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{]0,s]}} \mathscr{E}_K^{]0,s]} \otimes_{K_0} W)^G = \mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{]0,s]}} (\mathscr{E}_K^{]0,s]} \otimes_{K_0} W)^G,$$

ce qui montre que

$$\Delta = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^{]0,s]}} \Delta^{]0,s]}.$$

De plus, le fait que $\mathscr{E}_K^{]0,s/p]} \otimes_{\mathscr{E}_K^{]0,s]}} \varphi(\mathscr{E}_K^{]0,s]}) = \mathscr{E}_K^{]0,s/p]}$ et les formules pour l'action de φ sur

6. Ceci est possible grâce au fait que N est nilpotent : si $v_1, \dots, v_d$ est une base de D_{pst} de sorte que la matrice de N soit triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, alors on peut choisir des entiers $0 < n_2 < n_3 < \dots < n_d$ de sorte que la matrice de N dans la base $v_1, p^{n_2} v_2, \dots, p^{n_d} v_d$ soit à coefficients entiers comme on voulait.

7. Comme on le voit, par exemple, en notant que, si $s < (\delta_K + 1)^{-1}$, $\mathscr{E}_K^{]0,s]}$ est un $\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{]0,s]}$-module libre de rang d_{K_∞}, dont une base est formée par $1, T_K, \dots, T^{d_{K_\infty}-1}$, et donc $\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{]0,s]}} \mathscr{E}_K^{]0,s]} = \oplus_i \mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{]0,s]}} \mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{]0,s]} \cdot T_K^i = \oplus_i \mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p} \cdot T_K^i = \mathscr{R}_K$.

ℓ_T montrent que la deuxième condition du lemme 3.2.1 est satisfaite.

Les modules $\mathscr{E}_K^{]0,s]}\otimes W$ sont des $\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{]0,s]}$-modules libres, dont une base est donnée par les éléments $(T_K^i\otimes w_j)_{0\leq i\leq d_\infty,1\leq j\leq d}$, et ils sont munis d'une famille $(v^{[r,s]})_{0<r<s}$ de valuations définies par

$$v^{[r,s]}(\sum_{i,j} f_{ij}\cdot T_k^i\otimes w_j)=\inf_{i,j} v^{[r,s]}(f_{ij})\quad (f_{ij}\in\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{]0,s]}).$$

Calculons la norme de l'opérateur ∂ sur la base décrite ci-dessus pour une de ces valuations. On a $\partial(\ell_T)=1+T^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned}
\partial(w_i) &= \partial(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{-k}}{k!}\ell_T^k\otimes N^k v_i)\\
&= (1+T^{-1})\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{-k}}{(k-1)!}\ell_T^{k-1}\otimes N^k v_i\\
&= -\alpha^{-1}(1+T^{-1})\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{-k}}{k!}\ell_T^k\otimes N^k(Nv_i)\\
&= \sum_{l=1}^{d}-a_l\alpha^{-1}(1+T^{-1})\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{-k}}{k!}\ell_T^k\otimes N^k v_l\\
&= \sum_{l=1}^{d}-a_l\alpha^{-1}(1+T^{-1})w_l,
\end{aligned}$$

où $Nv_i=\sum_{l=1}^d a_l\cdot v_i$, avec $v_p(a_l)\geq 0$ pour tout l, par le choix de la base $v_1,\dots,v_d$ de D_{pst}. On en déduit que, si A dénote l'anneau des entiers de K_0 et W_0 dénote le A-module engendré par les éléments $w_1,\dots,w_d$, alors

$$\partial(W_0)\subseteq T^{-1}p^{-1}\cdot W_0.$$

En utilisant l'estimation du lemme 3.2.3 et la définition de $v^{]0,s]}$, on en déduit

$$\begin{aligned}
v^{[r,s]}(\partial(T_K^i\otimes w_j)) &= v^{[r,s]}(i\partial(T_K)T_K^{i-1}\otimes\partial w_j)\\
&\geq v^{[r,s]}(\partial(T_K)T^{-1}p^{-1})\\
&\geq -s-2.
\end{aligned}$$

Enfin, $\Delta^{]0,s]}\subseteq\mathscr{R}_K^{]0,s]}\otimes W$ est stable par ∂, il est muni par restriction d'une famille de valuations $v^{[r,s]}$, et on a, par ce qui précède,

$$v^{[r,s]}(\partial z)\geq v^{[r,s]}(z)-s-2,$$

ce qui finit la preuve du lemme.

□

Remarque 3.2.6.

— Si $0 < r < s < (\delta_K + 1)^{-1}$, les modules

$$\Delta^{[r,s]} = \mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{[r,s]} \otimes_{\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}^{]0,s]}} \Delta^{]0,s]} = (\mathscr{E}_K^{[r,s]} \otimes W),$$

complétés de $\Delta^{]0,s]}$ pour la valuation $v^{[r,s]}$, sont des $\mathscr{E}^{[r,s]}$-modules de rang d, munis de la valuation $v^{[r,s]}$ pour les quelles la norme de ∂ est $\geq -s-2$. On a

$$\Delta = \varinjlim_{s>0} \varprojlim_{0<r<s} \Delta^{[r,s]}.$$

— Le lemme 3.2.5 ci-dessus montre que le rayon de surconvergence du module Δ peut être majoré en termes du conducteur de la plus petite extension $K/\mathbf{Q}_p$ telle que $\mathscr{G}_K$ agit trivialement sur D_{pst}. Si $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est de Rham, ceci permet de borner le rayon de surconvergence de $\Delta = \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(V)$ en termes de la plus petite extension K de $\mathbf{Q}_p$ sur laquelle V dévient semi-stable.

3.2.6 (φ, Γ)-modules relatifs

Soit A une algèbre affinoïde sur $\mathbf{Q}_p$. On définit l'anneau de Robba $\mathscr{R}_A$ relatif à A en posant, pour $0 < r < s$,

$$\mathscr{R}_A^{[r,s]} = \mathscr{R}^{[r,s]} \widehat{\otimes} A; \quad \mathscr{R}_A^{]0,s]} = \varprojlim_{0<r<s} \mathscr{R}_A^{[r,s]}; \quad \mathscr{R}_A = \varinjlim_{s>0} \mathscr{R}_A^{]0,s]}.$$

Ceci s'interprète en termes de fonctions analytiques sur des espaces rigides : si $I \subseteq [0, 1[$ est un intervalle d'extremités dans $p^{\mathbf{Q}}$ et $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Sp}(\mathbf{Q}_p\langle T \rangle)$ dénote la droite affine rigide de paramètre T, en notant B_I l'ouvert admissible de $\mathbb{A}^1$ défini par $v_A(T) \in I$ ($v_A = -\log_p |\cdot|_A$ dénote la valuation de l'algèbre affïnoide A), on a un isomorphisme naturel

$$\mathscr{R}^I \cong \mathcal{O}(\mathrm{Sp}(A) \times B_I).$$

On a aussi une interprétation en termes de séries de Laurent (resp. de puissances si $0 \in I$) à coefficients dans A de la manière évidente. On a un endomorphisme A-linéaire d'anneaux $\varphi : \mathscr{R}_A^{]0,s]} \to \mathscr{R}_A^{]0,s/p]}$, qui envoie T sur $(1+T)^p - 1$, induisant une action de φ sur $\mathscr{R}_A$ et on a une action continue du groupe Γ, agissant par $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$, $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, sur tous les anneaux définis ci-dessus.

Un (φ, Γ)-*module sur* $\mathscr{R}_A^{]0,s]}$ est un module projectif et de type fini $D^{]0,s]}$ sur $\mathscr{R}_A^{]0,s]}$, muni d'actions semi linéaires du Frobenius et Γ, commutant entre elles, et tel que φ induit un isomorphisme $\mathscr{R}_A^{]0,s]}$-linéaire $\varphi \otimes \mathrm{id} : D^{]0,s]} \otimes_{\mathscr{R}_A^{]0,s]}} \mathscr{R}_A^{]0,s/p]} \to D^{]0,s]} \otimes_{\mathscr{R}_A^{]0,s]}, \varphi} \mathscr{R}_A^{]0,s/p]}$.

Un (φ,Γ)-*module sur* $\mathscr{R}_A$ est un $\mathscr{R}_A$-module D tel qu'il existe $s>0$ et un (φ,Γ)-module $D^{]0,s]}$ sur $\mathscr{R}_A^{]0,s]}$ tel que $D\cong D^{]0,s]}\otimes_{\mathscr{R}_A^{]0,s]}}\mathscr{R}_A$. Plus généralement, si X est un espace rigide analytique sur $\mathbf{Q}_p$ et $r\geq 0$, on définit $\mathscr{R}_X^{]0,r]}$ comme le faisceau de fonctions analytiques sur $X\times B_{]0,r]}$ et $\mathscr{R}_X=\varinjlim_{r<0}\mathscr{R}_X^{]0,r]}$.

3.2.7 Cohomologie des (φ,Γ)-modules

Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, le complexe du théorème 2.2.3 permet de calculer la cohomologie galoisienne de V en termes de son (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ sur $\mathscr{E}_{\mathbf{Q}_p}$ associé ([38]). D'après [43] et [42], on peut définir la cohomologie des (φ,Γ)-modules sur l'anneau de Robba $\mathscr{R}_A$ relatif à une algèbre affinoide A sur $\mathbf{Q}_p$ (et, plus généralement, sur un espace analytique rigide sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$), retrouvant les constructions de Herr dans le cas d'un (φ,Γ)-module étale au-dessus d'un point.

Soient A une algèbre affinoide sur $\mathbf{Q}_p$ et D un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}_A$. On note $\Gamma'\subseteq\Gamma$ la partie de p-torsion de Γ, qui est triviale si $p\neq 2$, et cyclique d'ordre 2 quand $p=2$. Soit $\gamma\in\Gamma$ tel que son image dans Γ/Γ' en est un générateur topologique. On pose $\gamma_0=\gamma$ et, pour $n\geq 1$, γ_n un générateur topologique de Γ_n. Pour $\delta\in\{\varphi,\psi\}$ et $\gamma'\in\{\gamma_n : n\geq 0\}$, on note $D'=D^{\Gamma'}$ si $n=0$ et $D'=D$ si $n\geq 1$, et on définit le complexe

$$\mathscr{C}^\bullet_{\delta,\gamma'}(D): 0\to D'\to D'\oplus D'\to D'\to 0,$$

où les flèches sont données, respectivement, par $x\mapsto((\delta-1)x,(\gamma'-1)x)$ et $(x,y)\mapsto(\gamma'-1)x-(\delta-1)y$. Les modules $H^\bullet_{\delta,\gamma'}(\mathbf{Q}_p,D)$ sont définis comme les groupes de cohomologie de ce complexe. Si $K=F_n$, $n\geq 0$, on notera $H^i(K,D)=H^i_{\varphi,\gamma_n}(D)$.

Proposition 3.2.7 (cf. [42], prop. 2.3.6 et thm. 4.4.2). *Soient A une algèbre affinoide sur $\mathbf{Q}_p$ et D un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}_A$. Les complexes $\mathscr{C}_{\varphi,\gamma'}(D)$ et $\mathscr{C}_{\psi,\gamma'}(D)$ sont quasi-isomorphes et les groupes de cohomologie $H^i_{\varphi,\gamma'}(D)$ sont des A-modules de type fini compatibles au changement de base. On a une dualité locale et une formule de Euler-Poincaré.*

3.2.8 Cohomologie d'Iwasawa des (φ,Γ)-modules

Soit $\Lambda=\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]=\varprojlim_n\mathbf{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_n]]$ l'algèbre d'Iwasawa de Γ. On décompose $\Gamma=\Gamma^{\mathrm{tors}}\times\Gamma^{\mathrm{st}}$, où Γ^{tors} et Γ^{st} désignent, respectivement, la partie de torsion et sans torsion de Γ, ce qui fournit un isomorphisme $\Lambda\cong\mathbf{Z}_p[\Gamma^{\mathrm{tors}}]\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Z}_p[[\Gamma^{\mathrm{st}}]]$. Soit γ un générateur topologique de Γ^{st} et notons $[\gamma]$ son image dans Λ. On obtient un isomorphisme $\Lambda\cong\mathbf{Z}_p[\Gamma^{\mathrm{tors}}]\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Z}_p[[T]]$ en envoyant $[\gamma]$ sur $1+T$.

Soit $\Lambda_\infty=\mathscr{R}^+(\Gamma)$ l'algèbre d'Iwasawa analytique. Précisément, si $\mathfrak{m}\subseteq\Lambda$ est l'idéal maximal de Λ (c'est l'idéal (p,T) si l'on choisit un isomorphisme $\Lambda\cong\mathbf{Z}_p[\Gamma^{\mathrm{tors}}]\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Z}_p[[\Gamma^{\mathrm{st}}]]$) et, pour $n\geq 1$, on pose $\Lambda_n=\mathscr{R}^{[r_n,+\infty]}(\Gamma)=\Lambda[\frac{\mathfrak{m}^{1/r_n}}{p}]^\wedge$ la complétion p-adique de $\Lambda[\frac{\mathfrak{m}^{1/r_n}}{p}]$, qui est une algèbre affinoïde sur $\mathbf{Q}_p$, alors l'application naturelle $\Lambda[\frac{\mathfrak{m}^{1/r_{n+1}}}{p}]\to\Lambda[\frac{\mathfrak{m}^{1/r_n}}{p}]$

induit $\Lambda_{n+1} \to \Lambda_n$ et on a

$$\Lambda_\infty = \varprojlim_n \Lambda_n \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p.$$

Le choix de l'isomorphisme $\Lambda \cong \mathbf{Z}_p[\Gamma^{\mathrm{tors}}]\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Z}_p[[T]]$ fait que $\Lambda_n = \mathbf{Z}_p[\Gamma^{\mathrm{tors}}]\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Z}_p[[T]][\frac{T^{1/r_n}}{p}]^\wedge$ s'identifie aux fonction analytiques sur la boule $v_p(T) \geq r_n$, d'où un isomorphisme $\Lambda_\infty \cong \mathbf{Q}_p[\Gamma^{\mathrm{tors}}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathscr{R}^+$. Ce dernier espace s'identifie à l'anneau $H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{O})$ des sections globales sur l'espace des poids p-adiques, qui, par le théorème d'Amice, s'identifie aussi à l'algèbre des distributions $\mathscr{D}(\Gamma)$ sur Γ.

On note Λ_n^ι le module Λ_n muni de l'action de Γ via $\gamma(f) = [\gamma^{-1}] \cdot f$, $\gamma \in \Gamma$ et $f \in \Lambda_n$. On définit

$$\mathbf{Dfm} = \varprojlim_n \Lambda_n^\iota \widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} \mathscr{R} = \varprojlim_n \varinjlim_{s>0} \varprojlim_{r<s} \Lambda_n^\iota \widehat{\otimes} \mathscr{R}^{[s,r]},$$

qui, dans la notation de la section 1.1.4, n'est rien d'autre que l'espace des distributions $\mathscr{D}(\Gamma, \mathscr{R})$ sur Γ à valeurs dans $\mathscr{R}$.

Si D est un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{R}$, on définit sa déformation cyclotomique par

$$\mathbf{Dfm}(D) = D \widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} \Lambda_\infty^\iota = \varprojlim_n \varinjlim_{s>0} \varprojlim_{r<s} D^{[r,s]}.$$

Les actions φ, ψ et Γ sont données par les formules

$$\varphi(x \otimes \lambda) = \varphi(x) \otimes \lambda, \quad \psi(x \otimes \lambda) = \psi(x) \otimes \lambda, \quad \gamma(x \otimes \lambda) = \gamma(x) \otimes [\gamma^{-1}]\lambda,$$

pour $x \in D$, $\lambda \in \Lambda_\infty$ et $\gamma \in \Gamma$. Le module $\mathbf{Dfm}$ est un (φ, Γ)-module sur l'anneau $\mathscr{R}_{\mathfrak{X}} = \varinjlim_n \mathscr{R}_{\mathfrak{X}_n}$ de Robba relatif à l'espace des poids. Encore une fois, on a, par définition, $\mathbf{Dfm}(D) = \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times, D)$.

On définit la cohomologie d'Iwasawa de D comme

$$H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D) = H^i_{\psi,\gamma}(\mathbf{Dfm}(D)).$$

Ce sont, d'après le théorème 3.2.7, des Λ_∞-modules de type fini. On peut donc voir les groupes de cohomologie d'Iwasawa comme des groupes de cohomologie à valeurs dans $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times, D)$.

Si $\eta : \Gamma \to L^\times$ est un caractère, on note aussi $\eta : \Lambda_\infty \to L$ le morphisme induit, et on a un isomorphisme

$$\mathbf{Dfm}(D) \otimes_{\Lambda_\infty, \eta} L \xrightarrow{\sim} D(\eta^{-1}).$$

Si $\mu \in H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D)$, cet isomorphisme induit des morphismes de spécialisation

$$H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D) \to H^i_{\psi,\gamma}(D(\eta)) : \quad \mu \mapsto \int_\Gamma \eta \cdot \mu.$$

Si $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$, on définit le complexe $\mathscr{C}^\bullet_\psi(D)$, concentré en $[1,2]$, par

$$[D \xrightarrow{\psi-1} D].$$

Le complexe $\mathscr{C}^\bullet_\psi(D)$ appartient à $\mathbf{D}^{[0,2]}_{\mathrm{perf}}(\Lambda_\infty)$ et calcule la cohomologie d'Iwasawa de D (cf. [42] thm. 4.4.8). On a, en particulier, un isomorphisme

$$\mathrm{Exp}^* : H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D) \to D^{\psi=1}$$

dont l'inverse est donnée par $z \mapsto [\frac{p-1}{p}\log(\chi(\gamma))(z\otimes 1), 0]$ [8]. Si $z \in D^{\psi=1}$, on note, afin d'alléger les notation, μ_z l'élément $(\mathrm{Exp}^*)^{-1}(z) \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D)$. Si $n \geq 0$, on a la formule pour la spécialisation

$$\int_\Gamma \eta\cdot\mu_z = \int_\Gamma \eta\cdot(\mathrm{Exp}^*)^{-1}z = [\tau_n(\gamma_n)(z\otimes e_\eta), 0] \in H^1_{\psi,\gamma}(D),$$

où $\tau_n(\gamma_n) = p^{-n}\log(\chi(\gamma_n))$, si $n \geq 1$ et $\tau_0(\gamma_0) = \frac{p-1}{p}\log(\chi(\gamma_0))$. Terminons en mentionnant que η induit un automorphisme sur Λ_∞ donné par $\eta([\gamma]) = \eta(\gamma)^{-1}\cdot[\gamma]$, ce qui induit un isomorphisme de (φ,Γ)-modules $\mathbf{Dfm}(D) \cong \mathbf{Dfm}(D(\eta))$, donné par $x\otimes[\gamma] \mapsto (x\otimes e_\eta)\otimes \eta(\gamma)^{-1}[\gamma]$, et donc un isomorphisme de Λ_∞-modules

$$H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D) \to H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D(\eta)) : \quad \mu \mapsto \mu\otimes e_\delta.$$

On a, par exemple,

$$\int_\Gamma \eta\cdot\mu = \int_\Gamma 1\cdot(\mu\otimes e_\eta).$$

3.2.9 Applications exponentielles

Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ un (φ,Γ)-module de Rham et $n \geq 0$. On rappelle dans cette section la définition des applications exponentielle et exponentielle duale de Bloch-Kato

$$\exp_{D,F_n} : L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \to H^1_{\varphi,\gamma_n}(D),$$

$$\exp^*_{D,F_n} : H^1_{\varphi,\gamma_n}(D) \to L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D).$$

Si M est un module muni d'une action de Γ, et $\gamma' \in \{\gamma_n : n \geq 0\}$, on pose [9]

$$C^\bullet_{\gamma'}(M) = [M' \xrightarrow{\gamma'-1} M'],$$

et on définit les groupes de cohomologie $H^i_{\gamma'}(M) = H^i(C^\bullet_{\gamma'}(M))$. Par exemple, si $D \in$

8. Si $p = 2$, il faut appliquer à z le projecteur naturel sur le sous espace d'éléments Γ'-invariants. On évitera ce cas-ci, se traitant de la même manière mais avec une complication technique supplémentaire.

9. Comme précédemment, $M' = M^{\Gamma'}$ si $\gamma' = \gamma_0$ et $M' = M$ autrement.

$\Phi\Gamma(\mathscr{R})$ et $n \geq 0$, alors

$$H^0_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)^{\Gamma_n} = L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D).$$

Proposition 3.2.8 (cf. [47], thm. 2.8). *Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ et $n \geq 0$. Il existe une suite exacte canonique et fonctorielle*

$$\begin{array}{rl} 0 \quad \to & H^0_{\varphi,\gamma_n}(D) \to H^0_{\varphi,\gamma_n}(D[1/t]) \oplus H^0_{\gamma_n}(\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(D)) \to H^0_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)) \to \\ \xrightarrow{\delta_{1,D}} & H^1_{\varphi,\gamma_n}(D) \to H^1_{\varphi,\gamma_n}(D[1/t]) \oplus H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(D))) \to H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)) \to \\ \to & H^2_{\varphi,\gamma_n}(D) \to H^2_{\varphi,\gamma_n}(D[1/t]) \to 0. \end{array}$$

On définit

$$\exp_{D,F_n} : L_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \to H^1_{\varphi,\gamma_n}(D)$$

comme le morphisme de connexion $\delta_{1,D}$ de la suite de la proposition 3.2.8 ci-dessus.

Explicitement, si $x \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = (\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))^{\Gamma}$, alors il existe m tel que $x \in \mathbf{D}_{\mathrm{dif},m}(D)$, et il existe aussi $\tilde{x} \in D^{]0,r_m]}[1/t]$ tel que $\varphi^{-k}(\tilde{x}) - x \in \mathbf{D}^+_{\mathrm{dif},k}(D)$ pour tout $k \geq m$. Alors on a

$$\delta_{1,D}(x) = [(\gamma-1)\tilde{x}, (\varphi-1)\tilde{x}] \in H^1_{\varphi,\gamma}(D).$$

On remarque que, par l'exactitude de la suite de la proposition, $\exp_D$ est nulle sur $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$.

Si $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ est un (φ,Γ)-module de de Rham et $n \geq 0$, on a un isomorphisme $L_\infty((t)) \otimes_{L_n} (L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)) \cong \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)$ et l'application $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \to H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))$ qui envoie $x \in L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ vers la classe de cohomologie $[\log \chi(\gamma_n)(1 \otimes x)] \in H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))$ est un isomorphisme. De plus, on a une application naturelle $H^1_{\varphi,\gamma_n}(D) \to H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(D)) \to H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))$ définie par $[(x,y)] \mapsto [\varphi^{-m}x]$, où $m \gg 0$ et $[\cdot]$ dénote la classe de cohomologie correspondante. Cette application est bien définie : si $(x,y) \in D \oplus D$ est un cocycle représentant une classe de cohomologie dans $H^1_{\varphi,\gamma_n}(D)$, alors $(1-\varphi)x = (1-\gamma_n)y$ et donc $\varphi^{-m}x - \varphi^{-(m-1)}x = (1-\gamma_n)\varphi^{-m}y$, ce qui implique que les images de $\varphi^{-m}x$ et $\varphi^{-(m-1)}x$ dans $H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(D)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)'/(1-\gamma_n)\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(D)'$ [10] diffèrent par un cobord et la classe définie par l'élément $\varphi^{-m}x$ ne dépend donc pas de m. On définit

$$\exp^*_{D,F_n} : H^1_{\varphi,\gamma_n}(D) \to L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$$

comme la composition $H^1_{\varphi,\gamma_n}(D) \to H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(D)) \to H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)) \xrightarrow{\sim} L_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$. Remarquons que, par construction, l'image de $\exp^*_{D,F_n}$ tombe dans $L_n \otimes \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$.

Si $D = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$, on a $\exp_{D,F_n} = \exp_{V,F_n}$ et $\exp^*_{D,F_n} = \exp^*_{V,F_n}$ via les isomorphismes $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et $H^i_{\varphi,\gamma_n}(D) \cong H^i(F_n, V)$. Enfin, les applications exp et

10. Rappelons une dernière fois que si M est un Γ-module et $n \geq 0$, on note $M' = M^{\Gamma'}$ si $n = 0$ et M' si non.

$\exp^*$ sont l'une l'adjointe de l'autre : si $x \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ et $y \in H^1_{\varphi,\gamma}(D^*(1))$, on a

$$\langle x, \exp^*_{D^*(1)}(y)\rangle = \exp_D(x) \cup y,$$

où l'accouplement à gauche $\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \times \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D^*(1)) \to \mathbf{Q}_p$ est induit par $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \times \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D^*(1)) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(1)) \cong \mathbf{Q}_p$ et celui à droite est l'accouplement local de cohomologie. Si cela ne pose pas de problèmes, on omettra les indices dans les notations des applications exponentielles.

3.2.10 Exponentielle de Perrin-Riou

Rappelons la formulation de l'application exponentielle de Perrin-Riou pour un (φ,Γ)-module de de Rham (cf. [47], [8]) et la loi de réciprocité. On définit, pour $h \geq 0$[11], l'opérateur différentiel

$$\nabla_h = (\nabla - h + 1) \circ (\nabla - h + 2) \circ \ldots \circ \nabla \in \Lambda_\infty.$$

Lemme 3.2.9. *Soit D un (φ,Γ)-module de de Rham sur $\mathscr{R}$ et soit $h \geq 1$ de sorte que* $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$. *Alors $\nabla_h(\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)) \subseteq D$ et induit un opérateur Λ_∞-linéaire*

$$\nabla_h : \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1} \to D^{\psi=1}.$$

Si $x \in \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1}$ et $n \geq 0$, l'expression $[\varphi^{-n}(x)]_j$[12], pour $j \in \mathbf{N}$, n'est définie que si n est assez grand. Pourtant, l'identité $\mathrm{Tr}_{L_m/L_n} \circ \varphi^{-m} = \varphi^{-m} \circ \psi^{m-n}$, $m \geq n \geq 0$, nous permet de lui donner toujours un sens en utilisant les traces et en considérant les valeurs $p^{-m}\mathrm{Tr}_{L_m/L_n}[\varphi^{-m}x]_j$, où m est n'importe quel entier assez grand.

Théorème 3.2.10 ([47], thm. 3.10)**.** *Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ de Rham, $h \geq 1$ un entier tel que* $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$, $z \in \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1}$ *et $n \geq 0$. On a*

(i) Si $j > 0$ et il existe $z_j \in \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=p^{-j}}$ vérifiant $\partial^j z_j = z$, ou si $0 \leq j \leq -(h-1)$ et $z_j = \partial^{-j} z$, alors, on a, pour $m \gg 0$,

$$\int_{\Gamma_n} \chi^j \cdot \mu_{\nabla_h z} = \frac{p^{m(j-1)}}{\Gamma^*(-j-h+1)} \exp(\mathrm{Tr}_{L_m/L_n}[\varphi^{-m} z_j]_0 \otimes t^{-j} e_j),$$

(ii) Si $j \geq h$, on a, pour $m \gg 0$,

$$\exp^*\Big(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot \mu_{\nabla_h z}\Big) = \frac{p^{m(-j-1)}}{\Gamma^*(-j-h+1)} \mathrm{Tr}_{L_m/L_n}[\varphi^{-m}\partial^j z]_0 \otimes t^j e_{-j}.$$

Remarque 3.2.11.

---

11. Dans la formule ci-dessous, ∇_0 dénote simplement l'identité et $\nabla_1 = \nabla$.

12. Rappelons que, si $x \in D^{]0,r_n]}$, l'élément $\varphi^{-n}x$ appartient à $L_n[[t]] \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$, s'écrit donc sous la forme $\varphi^{-n}x = \sum_{j\geq 0} d_j t^j$, $d_j \in L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ et pose alors $[\varphi^{-n}x]_j = d_j \in L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$.

— Rappelons que, pour $j \in \mathbf{Z}$, l'élément e_j dénote une base du L-espace vectoriel $L(j)$ muni d'actions de Γ et φ par les formules $\sigma_a(e_j) = a^j \cdot e_j$, $a \in \mathbf{Z}_p^\times$ et $\varphi(e_j) = e_j$. Si D est un (φ, Γ)-module, on note $D(j) = D \otimes_L L(j)$ la tordue de D par la j-ième puissance du caractère cyclotomique. Si D est de Rham, $D(j)$ l'est aussi et on a $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(j)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(j)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \otimes L \cdot (t^{-j} e_j) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \otimes L \cdot \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}}$, dans la notation de 2.3.2 (voir aussi plus loin). Le terme $[\varphi^{-n} z_j]_0$ appartient à $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ et $x \mapsto x \otimes t^{-j} e_j$ induit un isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(j))$. La première égalité a lieu dans $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(j))$ et la deuxième dans $L_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(-j))$.

— Notonons que $\mu \mapsto \mu \otimes e_j$ induit, pour $j \in \mathbf{Z}$, un isomorphisme $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, D(j))$ et on a $\int_{\Gamma_n} \chi(x)^{-j} \cdot \mu_z = \int_{\Gamma_n} 1 \cdot (\mu_z \otimes e_{-j})$. Si $j \geq 0$, l'élément $\varphi^{-n}(z \otimes e_{-j}) \in L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(-j))$ s'écrit sous la forme $t^{-j} \varphi^{-n} z \otimes t^j e_{-j}$ et, si on écrit $\varphi^{-n} z = \sum_l d_l t^l \in L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$, l'expression $[\varphi^{-n}(z \otimes e_{-j})]_0$ dénote l'élément $d_j \otimes t^{-j} e_j$, qui n'est autre que $\frac{p^{-nj}}{j!}[\varphi^{-n} \partial^j z]_0 \otimes t^j e_{-j}$, et le deuxième point du théorème est donc une paraphrase de la loi de réciprocité de Cherbonnier-Colmez. Pour $j < 0$, le résultat est un peu plus mystérieux (au moins pour l'auteur) car l'opérateur ∂^j, devenant un opérateur d'intégration, fait apparaître des termes qu'on ne voyait pas directement dans le développement de $\varphi^{-n} z$.

— Si $j \gg 0$ l'application $\exp_{D(j), F_n}$ est bijective et on peut reformuler le résultat en disant que, si $j \geq 0$ ou $j \ll 0$, alors, pour $m \gg 0$, on a

$$\mathrm{Tr}_{L_m/L_n}[\varphi^{-m} \partial^j z]_0 = \frac{\Gamma^*(-j-h+1)}{p^{m(-j-1)}} \cdot \log\Big(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot \nabla_h \mu_z\Big) \otimes \mathbf{e}_{-j}^{\mathrm{dR}, \vee},$$

où log dénote, comme précédemment, exp ou $\exp^*$ selon que $j \ll 0$ ou que $j \geq 0$.

— Si $n \geq m(\Delta)$ ($\Delta = \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$), alors l'introduction de m dans les formules est superflue et, comme $\psi(z) = z$, alors $z \in D^{]0, r_n]}$ et on a

$$p^{-m(j+1)} \mathrm{Tr}_{L_m/L_n}[\varphi^{-m} \partial^j z]_0 = \frac{[L_m : L_n]}{p^{m-n}} [\varphi^{-n(j+1)} \partial^j z].$$

On remarque que $\frac{[L_m:L_n]}{p^{m-n}} = 1$ si $n > 0$ et $\frac{[L_m:L]}{p^m} = \frac{p-1}{p}$.

— Si $V \in \mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$ est une représentation cristalline, on a un isomorphisme $\mathscr{R} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \cong \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(V)$ défini par $f(T) \otimes x \mapsto f(T)x$. On peut composer la restriction de ∇_h à $(\mathscr{R}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1} \cong \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$ avec l'inverse de l'isomorphisme de Fontaine-Pottharst $\mathrm{Exp}^* : H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \otimes_{\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]} \Lambda_\infty \to \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$ et l'application

$$(\mathrm{Exp}^*)^{-1} \circ \nabla_h : \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1} \to H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \otimes_{\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]} \Lambda_\infty$$

ainsi obtenue coïncide avec l'application de périodes de Perrin-Riou (cf., par exemple, [47], 3.5, ou la discussion précédente au thm. 2.2.7).

On se servira de la version suivante de la loi de réciprocité de Cherbonnier-Colmez, qui est, comme on l'a dit, un des ingrédients de la preuve du théorème précédent.

Proposition 3.2.12. *Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ de Rham, $z \in D^{\psi=1}$, $n \geq 0$ et $j \geq 0$. Alors, pour $m \gg 0$, on a*

$$\exp^*(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot \mu_z) \otimes t^{-j} e_j = \frac{1}{j!} p^{-m(j+1)} \mathrm{Tr}_{L_m/L_n}([\varphi^{-m}\partial^j z]_0).$$

Démonstration. La preuve peut être trouvée dans, par exemple, [8] thm. II.6 (adapté au cas général) ou bien [47], thm. 3.10. On reproduit les calculs par commodité. La formule $\exp^*(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot \mu_z) = \exp^*(\int_{\Gamma_n} 1 \cdot \mu_{z \otimes e_{-j}})$ permet de nous ramener au cas $j = 0$. En outre, la formule $\mathrm{Tr}_{L_{n+1}/L_n}(\exp^*_D(x)) = \exp^*_D(\mathrm{cor}_{F_{n+1}/F_n}(x))$ [13] nous ramène à montrer le résultat pour n assez grand. En particulier on peut considérer $n > 0$ de sorte que $z \in D^{]0,r_n]}$ et on doit donc montrer

$$\exp^*(\int_{\Gamma_n} 1 \cdot \mu_z) = p^{-n}[\varphi^{-n} z]_0.$$

On a la formule pour la spécialisation $\int_{\Gamma_n} 1 \cdot \mu_z = [\tau_n(\gamma_n)(z \otimes 1), 0] \in H^1_{\psi,\gamma}(D)$, où $\tau_n(\gamma_n) = p^{-n} \log(\chi(\gamma_n))$ (car on suppose $n > 0$). Rappelons que l'application $\exp^*$ est définie comme la composition du morphisme $H^1_{\varphi,\gamma_n}(D) \to H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))$ avec l'inverse du morphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \xrightarrow{\sim} H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))$ donné par $x \mapsto [\log(\chi(\gamma_n))(1 \otimes x)]$.

Si $z \in D^{\psi=1}$, le coycle $[z, 0] \in H^1_{\psi,\gamma_n}(D)$ correspond au cocycle $[z, (1-\gamma_n)^{-1}(1-\varphi)z] \in H^1_{\varphi,\gamma}$ sous l'isomorphisme entre ces deux modules. L'image du cocycle $[\tau_n(\gamma_n)(z \otimes 1), 0]$ par le morphisme $H^1_{\varphi,\gamma_n}(D) \to H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))$ est donc donnée par $[\tau_n(\gamma_n)\varphi^{-n} z]$.

Or, $\varphi^{-n} z = \sum_{l \geq 0} a_l t^l$, $a_l \in L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ et $[\tau_n(\gamma_n) \sum_{l \geq 0} a_l t^l] = [\tau_n(\chi(\gamma_n)) a_0]$ (dans $H^1_{\gamma_n}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))$), car tous les autres termes sont dans l'image de $(1 - \gamma_n)$ (en effet, si $l \neq 0$, $a_l t^l = (1 - \gamma_n)((1 - \chi(\gamma_n)^l)^{-1} a_l t^l \ldots)$, ce qui permet de conclure car $a_0 = [\varphi^{-n} z]_0$. $\square$

3.3 La fonction L locale

3.3.1 Distributions à valeurs dans Δ

On reprend les constructions de 1.1.4. Si Δ est un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{R}$ (ou, plus généralement, n'importe quel espace de type LF), on pose

$$\mathcal{O}(\mathfrak{X}) \widehat{\otimes} \Delta = \varprojlim_n \varinjlim_{s>0} \varprojlim_{0<r<s} \mathcal{O}(\mathfrak{X}_n) \widehat{\otimes} \Delta^{[r,s]},$$

où le dernier produit tensoriel est le produit tensoriel usuel entre deux espaces de Banach. On dit que f est une fonction analytique sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans Δ si f est un élément de

13. Si $[x, y] \in H^1_{\psi,\gamma_{n+1}}(D)$, sa corestriction est définie par la formule $\mathrm{cor}_{F_{n+1}/F_n}([x, y]) = [\frac{1-\gamma_{n+1}}{1-\gamma_n} x, y] \in H^1_{\psi,\gamma_n}(D)$, cf. [13], lemme II.2.1.

$\mathscr{O}(\mathfrak{X})\widehat{\otimes}\Delta$. On a

$$\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times,\Delta)=\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^\times)\widehat{\otimes}\Delta=\varprojlim_n \mathscr{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\varinjlim_{s>0}\varprojlim_{r<s}\Delta^{[r,s]}=\varprojlim_n\varinjlim_s\varprojlim_r \mathscr{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\Delta^{[r,s]},$$

où les égalités des extrémités sont des définitions. Ceci nous permettrait de parler indistinctement de distributions sur $\mathbf{Z}_p^\times$ et de fonctions analytiques sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans Δ.

3.3.2 Prolongement analytique de $k\mapsto\partial^k$

Soit $D\in\Phi\Gamma(\mathscr{R})$ de rang d, de Rham, et notons $\Delta=\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$. Rappelons que, d'après le lemme 3.2.5, il existe, pour tout $s<(\delta_K+1)=r(\Delta)$ ($K/\mathbf{Q}_p$ est comme dans la notation du lemme cité), des sous-$\mathscr{E}^{]0,s]}$-modules $\Delta^{]0,s]}$ de Δ, munis d'une famille de valuations $v^{[r,s]}$, $0<r<s<r(\Delta)$, pour lesquelles la norme de l'opérateur ∂ satisfait

$$v^{[r,s]}(\partial)\geq -s-2\geq -(\delta_K+1)^{-1}-2.$$

De plus, pour $s<r(\Delta)$, les opérateurs

$$\varphi:\Delta^{]0,s]}\to\Delta^{]0,s/p]},\quad \psi:\Delta^{]0,s/p]}\to\Delta^{]0,s]},$$

agissent de façon continue pour les valuations $v^{[r,s]}$. Rappelons aussi qu'on a,

$$\Delta=\varinjlim_{s>0}\Delta^{]0,s]}.$$

La proposition suivante est l'analogue, pour $\Delta^{\psi=0}$, de la proposition 1.2.1

Proposition 3.3.1. *Soient $\kappa\in\mathfrak{X}$ et $z\in\Delta^{\psi=0}$. Alors, la série*

$$\sum_{i\in(\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z})^\times}\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{\omega_\kappa}{j}\kappa(i)i^{-j}(1+T)^i p^{Nj}\varphi^N(\partial^j z_i)\tag{3.1}$$

converge, pour $N\gg 0$, dans $\Delta^{\psi=0}$, et la somme ne dépend pas de N. L'application $\kappa\mapsto\kappa(\partial)z$ ainsi définie est une fonction rigide analytique sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\Delta^{\psi=0}$.

Démonstration (de la proposition). La démonstration repose sur des calculs du même genre que ceux de la proposition 1.2.1, à l'exception du fait qu'il y a maintenant des constantes qui apparaissent.

Notons, pour $N>0$ et $0<r<s<r(\Delta)p^{-N}$, $C^{[r,s]}_{\varphi^N}$ et $C^{[r,s]}_{\psi^N}$ les normes, relatives aux valuations $v^{[r,s]}$ et $v^{[p^Nr,p^Ns]}$, des opérateurs

$$\varphi^N:\Delta^{]0,p^Ns]}\to\Delta^{]0,s]},\quad \psi^N:\Delta^{]0,s]}\to\Delta^{]0,p^Ns]}.$$

Notons aussi, pour $N > 0$ et $0 < r < s < r(\Delta)$, $C_\partial^{[r,s]}$ la norme de l'opérateur ∂ pour la valuation $v^{[r,s]}$, de sorte que $C_\partial^{[r,s]} \geq -s-2$.

Pour $i \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times$, on pose

$$g_j(\kappa) = \binom{\omega_\kappa}{j}\kappa(i)i^{-j}(1+T)^i p^{Nj}\varphi^N(\partial^j z_i),$$

où $z = \sum_{i\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times}(1+T)^i\varphi^N(z_i)$, $z_i = \psi^N((1+T)^{-i}z)$. Supposons $s < r(\Delta)p^{-N}$, on a alors

$$\begin{aligned} v^{[r,s]}(\varphi^N(\partial^j z_i)) &\geq v^{[p^Nr,p^Ns]}(\partial^j\psi^N((1+T)^{-i}z)) - C_{\varphi^N}^{[r,s]} \\ &\geq v^{[p^Nr,p^Ns]}(\psi^N((1+T)^{-i}z)) - C_{\varphi^N}^{[r,s]} - jC_\partial^{[p^Nr,p^Ns]} \\ &\geq v^{[r,s]}(z) - C_{\varphi^N}^{[r,s]} - jC_\partial^{[p^Nr,p^Ns]} - C_{\psi^N}^{[r,s]}. \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus et celles obtenues dans la preuve de la proposition 1.2.1 donnent

$$\inf_{\kappa\in\mathfrak{X}_n} v^{[r,s]}(g_j(\kappa)) \geq v^{[r,s]}(z) - C_{\varphi^N}^{[r,s]} - C_{\psi^N}^{[r,s]} + j(C_n + N + C_\partial^{[p^Nr,p^Ns]}),$$

où $C_n = \min(\inf_{k\geq 0}\{p^k/n - k\})v_p(q), 0) - (p-1)^{-1}$ est la constante apparaissant dans la démonstration de la proposition 1.2.1. On sait que $C_\partial^{[p^Nr,p^Ns]} \geq -p^Ns - 2$.

Par définition de fonction analytique sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans Δ, il faut montrer que, pour tout $n > 0$, il existe $s > 0$ et $N > 0$ tel que, pour tout $r \in]0, s]$, l'expression (3.1) est convergente pour la valuation naturelle de $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\Delta^{[r,s]}$, et que les éléments dans $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\mathscr{R}$ ainsi définis ne dépendent pas de N et sont compatibles par rapport aux applications naturelles de restriction $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_{n+1})\widehat{\otimes}\mathscr{R} \to \mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\mathscr{R}$.

Fixons n et choisissons $s < r(\Delta)p^{-N}$ et N de sorte que $(C_n + N - p^Ns - 2) > 0$. On observe qu'aucun choix ne dépende de r. Ceci montre que la somme des $g_j(\kappa)$ converge sur $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\Delta^{[r,s]}$ pour tout $r < s$ et définit, pour chaque $n \geq 0$, un élément dans $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)\widehat{\otimes}\Delta$.

Les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 1.2.1 montrent que les fonctions ainsi définies ne dépendent ni de N ni de n, ce qui montre que l'expression 3.1 définit bien un élément dans $\mathcal{O}(\mathfrak{X})\widehat{\otimes}\Delta$ et permet de conclure. $\square$

Corollaire 3.3.2. *Soit $N(n)$ le plus petit N qui fait que la formule (3.1) soit bien définie sur $\mathfrak{X}_n$ et soit $\kappa \in \mathfrak{X}_n$. Alors, pour tous $0 < r < s < r(\Delta)p^{-N(n)}$, $\kappa(\partial)$ stabilise $\Delta^{[r,s]}$.*

3.3.3 Bases et modules de de Rham

Réadaptons les notations de 2.3.2 (on y reviendra encore une fois dans 4.1). Si $\xi : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ est un caractère, on note e_ξ une base du module $L(\xi)$ muni d'actions de φ et Γ via les formules $\varphi(e_\xi) = \xi(p)\cdot e_\xi$ et $\sigma_a(e_\xi) = \xi(a)\cdot e_\xi$, $a \in \mathbf{Z}_p^\times$. On note $D(\xi) = D\otimes\xi$ le module

$D \otimes_L L(\xi)$ (c'est le tordu de D par ξ). Le choix de e_ξ fournit un isomorphisme de L-espaces vectoriels $D \xrightarrow{\sim} D(\xi) : x \mapsto x \otimes e_\xi$.

Soit $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère localement constant. L'élément $G(\eta)e_\eta \in L_\infty$ est fixé par l'action de Γ et on a donc un isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\eta)) = (L_\infty((t)) \cdot e_\eta)^\Gamma = L \cdot G(\eta)e_\eta$, ce qui nous fournit un générateur $\mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}} = G(\eta)e_\eta$ de ce module. Si $j \in \mathbf{Z}$, on rappelle que l'on a noté $e_j = e_{\chi^j}$ une base du module $L(\chi^j)$, de sorte que $\mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} = t^{-j}e_j$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\chi^j))$. Notons

$$\mathbf{e}_{\eta,j} = e_\eta \otimes e_j,$$

qui est une base de $L(\eta\chi^j)$. L'élément

$$\mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}} = \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} = G(\eta)t^{-j} \cdot \mathbf{e}_{\eta,j} = G(\eta)e_\eta \otimes t^{-j}e_j$$

constitue une base du module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\eta\chi^j))$.

Si $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ est de Rham, alors $D(\eta\chi^j)$ l'est aussi et on a, par ce qui précède,

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(\eta\chi^j)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D \otimes L(\eta\chi^j))^\Gamma = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \otimes L \cdot \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}}.$$

L'application $x \mapsto x \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}}$ induit donc un isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(\eta\chi^j))$.

Enfin, on note $e_\eta^\vee = e_{\eta^{-1}}$, $e_j^\vee = e_{-j}$ les éléments duaux, respectivement, de e_η et e_j, ainsi que

$$\mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1} \cdot e_\eta^\vee \otimes t^j e_j^\vee,$$

base du module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\eta^{-1}\chi^{-j}))$. L'application $x \mapsto x \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee}$ induit un isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(\eta\chi^j)^*) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ et on a $x \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee} = x$ pour tout $x \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$.

3.3.4 Interpolation

Soient η un caractère de Dirichlet de conducteur p^m, $m \geq m(\Delta)$ et $\kappa(x) = z_\kappa^{\frac{\log x}{q}}$. On pose[14]

$$\Lambda_{D,z}(\eta\kappa) = \mathrm{G}(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-m}\kappa(\partial)(1-\varphi)z]_0 \in L_m \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D). \tag{3.2}$$

L'application φ^{-m} est définie sur $\Delta^{]0,r_m]}$ et l'expression ci-dessus n'a donc un sens que pour les caractères κ tels que $\kappa(\partial)(1-\varphi)z \in \Delta^{]0,r_m]}$. Nous allons montrer que $\Lambda_{D,z}$ est bien définie dès que η est un caractère de Dirichlet assez ramifié et κ est un caractère vivant dans un certain voisinage ouvert du caractère trivial et que les valeurs interpolées par $\Lambda_{D,z}$ aux caractères spéciaux $\eta\chi^j$, $j \in \mathbf{Z}$, sont reliées à des valeurs arithmétiquement intéressantes. Le théorème principal de ce chapitre est le suivant

14. Comparer cette définition avec les formules des propositions 2.3.3 et 2.3.5

Théorème 3.3.3. *Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ de Rham, $z \in \Delta^{\psi=1}$ et h tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$. Il existe une constante $N(\Delta)$ (ne dépendant que de l'extension K fournie par le théorème de monodromie p-adique et de p)*[15]*, telle que la formule (3.2) définit une fonction rigide analytique $\Lambda_{D,z} \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_D) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$, où $\mathfrak{U}_D = \mathfrak{B}(N)$. De plus, pour tout caractère $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_D$, où η est d'ordre fini et $j \in \mathbf{Z}$, on a*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = \Gamma^*(j-h+1)p^{n(j+1)} \cdot \begin{cases} \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_{\nabla_h z}) \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee} & si\ j \geq h \\ \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_{\nabla_h z}) \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee} & si\ j \ll 0, \end{cases}$$

De plus, si D est cristallin, l'application $\Lambda_{D,z}$ coïncide avec celle construite dans la proposition 2.3.6, et provient donc par restriction d'une fonction rigide analytique définie sur tout l'espace des poids.

Remarque 3.3.4.

- L'application Exp^* étant Λ_∞-linéaire, on a $\mu_{\nabla_h z} = \nabla_h \mu_z$.
- La preuve du théorème conste de trois parties. Dans la section 3.3.5, on calcule la constante $N(\Delta)$, qui fournit l'ouvert de définition de $\Lambda_{D,z}$, et, dans les sections 3.3.6 et 3.3.7, on montre les propriétés d'interpolation. Notons que, si l'on définit log comme dans 2.3.6, on obtient un énoncé d'interpolation pour tous les entiers $j \in \mathbf{Z}$.

3.3.5 Calcul du rayon de convergence

Si η est un caractère de conducteur p^m, $\kappa(x) = z_\kappa^{\frac{\log x}{q}}$ alors, pour que la formule (3.2) définissant l'application $\Lambda_{D,z}(\delta)$ ait un sens, il suffit que $\kappa(\partial)(1-\varphi)z \in \Delta^{]0,r_m]}$. Ceci impose des conditions sur la valeur de N dans la définition de $\kappa(\partial)$, comme le montre le corollaire 3.3.2. Le lemme suivant calcule, pour un η fixe, le rayon de convergence autour η de cette formule, ce qui décrit l'ouvert $\mathfrak{U}_D$ de définition de l'application $\Lambda_{D,z}$.

Lemme 3.3.5. *Soient $z \in \Delta^{\psi=1}$ et $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère de conducteur p^m, $m > m(\Delta)$. Il existe une constante $N(\Delta) = C_p + m(\Delta)$, où C_p est une constante qui ne dépend que de p, telle la formule définissant $\Lambda_{D,z}(\eta\kappa)$ est bien définie dès que $v_p(z_\kappa - 1) > p^{N(\Delta)-m}$.*

Démonstration. L'élément $\kappa(\partial)(1-\varphi)z$ est défini comme somme des

$$g_j(\kappa) = \binom{\omega_\kappa}{j}\kappa(a)a^{-j}(1+T)^a p^{Nj}\varphi^N(\partial^j z_a),$$

pour N assez grand. Ces éléments appartiennent[16] à $\Delta^{]0,r_m]}$ si $N < m - m(\Delta)$. Prenons donc $N = m - m(\Delta) - 1$.

15. cf. le lemme 3.3.5 ci-dessous pour le calcul de la constante.
16. Rappelons que, comme $z \in \Delta^{\psi=1}$, alors $z \in \Delta^{]0,r_{m(\Delta)}]}$, et donc $\varphi^N(\partial^j z_a) \in \Delta^{]0,r_{m(\Delta)+N+1}]}$.

Soit $N(\Delta) = C_p + m(\Delta)$, avec

$$C_p = -1/\log p - \log\log p + v_p(q) + \frac{1}{p-1} + 4,$$

et montrons que, si $v_p(z_\kappa - 1) > p^{N(\Delta)-m}$, la somme définissant $\kappa(\partial)(1-\varphi)z$ converge.

Par la démonstration de la proposition 3.3.1, on a

$$v^{[r,r_m]}(g_j) \geq C + j(\frac{1}{j}v_p\binom{\omega_\kappa}{j} + N + C_\partial^{[p^N r, p^N r_m]}),$$

où C est une constante qui ne dépend pas de j et $C_\partial^{[p^N r,p^N r_m]} \geq -p^N r_m - 2 = -r_{m(\Delta)+1} - 2$. On se ramène donc à montrer que

$$\frac{1}{j}v_p\binom{\omega_\kappa}{j} > m(\Delta) - m + r_{m(\Delta)+1} + 3.$$

On a $\omega_\kappa = \frac{\log\kappa(\exp(q))}{q} = \frac{\log z_\kappa}{q}$, donc $v_p(\omega_\kappa) = v_p(\log z_\kappa) - v_p(q) \geq \inf\{v_p(z_\kappa - 1)p^k - k\} - v_p(q)$. On a deux cas :

— Si $v_p(\omega_\kappa) \geq 0$, alors la condition est automatiquement satisfaite dès que $m > m(\Delta) + 4$.

— Supposons que $v_p(\omega_\kappa) < 0$. On a $v_p\binom{\omega_\kappa}{j} = jv_p(\omega) - v_p(j!) \geq j(v_p(\omega_\kappa) - \frac{1}{p-1})$. Pour montrer l'inégalité ci-dessus, il suffit donc de montrer que

$$\inf_{k\geq 0}\{v_p(z_\kappa - 1)p^k - k\} > v_p(q) + \frac{1}{p-1} + m(\Delta) - m + r_{m(\Delta)+1} + 3.$$

Ceci revient à montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $v_p(z_\kappa - 1)p^k - k > v_p(q) + \frac{1}{p-1} + m(\Delta) - m + r_{m(\Delta)+1} + 3$, ou, de manière équivalente,

$$v_p(z_\kappa - 1) > p^{-k}(v_p(q) + \frac{1}{p-1} + m(\Delta) - m + r_{m(\Delta)+1} + 3 + k) = p^{-k}(C + k).$$

La fonction d'une variable réelle $f(x) = p^{-x}(C + x)$ atteint son maximum absolu en $x = 1/\log p - C$. On a donc

$$p^{-k}(v_p(q) + \frac{1}{p-1} + m(\Delta) - m + r_{m(\Delta)+1} + 3 + k) \leq p^{m(\Delta)+C_\Delta^\partial + C_p - m},$$

ce qui permet de conclure.

Remarque 3.3.6.

— Le lemme ci-dessus nous permet de décrire l'ouvert $\mathfrak{U}_D \subseteq \mathfrak{X}$ de définition de $\Lambda_{D,z}$: il est une union de boules centrées sur les points ζ_{p^n}, $n > m(\Delta)$, de rayon $p^{m-N(\Delta)}$ (qui tend vers 1 quand $\mathrm{c}(\eta) \to +\infty$).

— Si ζ_{p^m}, $\zeta_{p^m}^a$, $1 \neq a \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times$, sont deux racines primitives de l'unité (correspondant au choix de deux caractères d'ordre fini du même conducteur), alors $v_p(\zeta_{p^m} - \zeta_{p^m}^a) = v_p(\zeta_{p^m} - 1) = \frac{1}{p^{m-1}(p-1)}$, qui est, sauf peut être à quelques exceptions près, $< p^{N(\Delta)-m}$, et donc les boules sont disjointes...

— Un entier $j \in \mathbf{Z}$ correspond au caractère χ^j et $z_j = z_{\chi^j} = (1+2p)^j$ [17]. On en déduit que $v_p(z_j - 1) > p^{N-\mathrm{c}(\eta)}$ si $v_p(j) > p^{N-\mathrm{c}(\eta)}$. L'ouvert $\mathfrak{B}(\eta, N)$ contient alors tous les caractères de la forme $\eta\chi^j$, $v_p(j) > p^{N-\mathrm{c}(\eta)}$. En particulier, si $N - \mathrm{c}(\eta) < 0$, il contient tous les entiers $j \equiv 0$ modulo $2p$.

□

3.3.6 Interpolation des applications exponentielles duales

On commence par quelques résultats préliminaires. On pourra comparer le lemme suivant avec 2.3.2 ou le lemme II.1 dans [8] (pour le cas cristallin et le caractère trivial).

Lemme 3.3.7. *Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ un (φ,Γ)-module de de Rham, $z \in \Delta^{\psi=1}$ et η un caractère de Dirichlet de conducteur p^n, $n \geq m(\Delta)$ et $m \geq 0$. Alors*

(i) Si $m(\Delta) \leq m < n$, on a

$$\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})} \eta(a)\sigma_a\left(\left[\partial^j\varphi^{-m}z\right]_0\right) = 0,$$

(ii) $\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})} \eta(a)\sigma_a(p^{-m}\mathrm{Tr}_{L_m/L_n}\left[\partial^j\varphi^{-m}z\right]_0)$ ne dépend pas de $m \geq n$.

Démonstration. Par définition de Δ, on a $\varphi^{-m}z \in L_m[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ et on a l'égalité $p^{-k}\mathrm{Tr}_{L_{m+k}/L_m}\varphi^{-(m+k)}z = \varphi^{-m}z$ car z est fixé par ψ, d'où $\varphi^{-m}z$ peut être exprimé comme $\sum_{h\geq 0}\sum_{b\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})}(\zeta_{p^m}^b \otimes d_{h,b})t^h$ (l'expression n'est évidement pas unique).

Montrons le premier point. Il suffit, par linéarité, de montrer le résultat sous l'hypothèse que $[\partial^j\varphi^{-m}z]_0 = \zeta_{p^m}^b \otimes d$, avec $0 \leq b \leq p^m - 1, d \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$. Or,

$$\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a(\zeta_{p^m}^b \otimes d) = \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\zeta_{p^m}^{ab} \otimes d = p^n\hat{\eta}(-b/p^m) \otimes d.$$

On en déduit le résultat en remarquant que $\hat{\eta}$ est une fonction à support dans $p^{-n}\mathbf{Z}_p^\times$ et que $v_p(-b/p^m) > -n$.

En ce qui concerne le dernier point, on peut supposer par linéarité que $\mathrm{Tr}_{L_m/L_n}[\partial^j\varphi^{-m}z]_0$ est de la forme $\zeta_{p^n}^b \otimes d$, où $b \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}), d \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$. On a

$$p^{-m}\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a(\zeta_{p^n}^b \otimes d) = p^m \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\zeta_{p^n}^{ab} \otimes d = \hat{\eta}(-b/p^n) \otimes d = p^{-n}G(\eta)\eta^{-1}(b) \otimes d.$$

L'expression ci-dessus ne dépend pas de m, d'où le résultat. □

17. On a posé $z_{\chi^j} = (\exp q)^j$, mais cela ne change rien si l'on choisit un autre générateur de $1 + 2p\mathbf{Z}_p$, comme par exemple $1 + 2p$.

Lemme 3.3.8. *Soient $z \in D^{\psi=1}$, η un caractère constant modulo p^n avec $n \geq m(\Delta)$ et $m \geq n$. On a alors l'égalité suivante dans $H^1_{\varphi,\gamma_m}(D(-j))$*

$$\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z = \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)a^{-j} \int_{\Gamma_m} \chi^{-j} \cdot \mu_{\sigma_a(z)}.$$

De plus, si D est de de Rham, on a l'égalité (dans $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(-j))$)

$$\exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1} \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times} \eta(a)a^{-j} \exp^*_{D(-j)}(\int_{\Gamma_m} \chi^{-j} \cdot \mu_{\sigma_a(z)}).$$

Démonstration. Ce lemme est une reformulation de 2.3.1 et se démontre de la même manière. Montrons seulement le deuxième point, vu que les mêmes techniques seront utilisées plus tard. Notons $T_{\mathbf{Q}_p} = \lim_{n\to+\infty} p^{-n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}$ la trace de Tate normalisée. Par la proposition 3.2.12 (appliqué à $D(\eta\chi^{-j})$, $j = 0$ et $n = 0$), on a

$$\begin{aligned} \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z) &= p^{-n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}([\varphi^{-n}(z \otimes e_\eta \otimes e_{-j})]_0) \\ &= p^{-n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}(G(\eta^{-1})[t^{-j}\varphi^{-n}z]_0) \otimes G(\eta)e_\eta \otimes t^j e_{-j}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que l'élément $\mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,-j} = G(\eta)e_\eta \otimes t^j e_{-j}$ est fixé par Γ et commute donc à la trace. Notons que $[t^{-j}\varphi^{-n}z]_0 = [\varphi^{-n}z]_j$. La somme de Gauss s'écrit comme

$$G(\eta)^{-1} = p^{-n}\eta(-1)G(\eta^{-1}) = p^{-n}\eta(-1) \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta^{-1}(a)\zeta^a_{p^n}$$

et on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{L_n/L}(G(\eta)^{-1}[\varphi^{-n}z]_j) &= \eta(-1)p^{-n} \sum_{b\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(b) \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta^{-1}(ab)\zeta^{ab}_{p^n}\sigma_b[\varphi^{-n}z]_j \\ &= G(\eta)^{-1} \sum_{b\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(b)\sigma_b[\varphi^{-n}z]_j \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule pour la trace et encore une fois la formule reliant $G(\eta)$ et $G(\eta^{-1})$. On en déduit

$$\exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z) = p^{-n}G(\eta^{-1}) \sum_{b\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(b)\sigma_b([\varphi^{-n}z]_j) \otimes G(\eta)e_\eta \otimes t^j e_{-j}.$$

Or $\sigma_b[\varphi^{-n}z]_j = b^{-j}[\varphi^{-n}\sigma_b z]_j$ et, par la loi de réciprocité encore une fois (pour D, j et n), on sait que $p^{-n}[\varphi^{-n}\sigma_b z]_j \otimes t^j e_{-j} = \exp^*(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot \mu_{\sigma_b(z)})$. On en déduit

$$\exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}} = G(\eta)^{-1} \sum_{b\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(b)b^{-j} \exp^*(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j}\mu_{\sigma_b(z)}),$$

ce qui permet de conclure. □

Proposition 3.3.9. *Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ un (φ,Γ)-module de de Rham, $z \in \Delta^{\psi=1}$, h un entier tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$, η un caractère de Dirichlet de conducteur p^n, $n \geq m(D)$, et $j \geq h$ un entier. On a alors l'égalité suivante dans $L_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = (-h+j)!p^{n(j+1)} \cdot \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \nabla_h\mu_z) \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee}.$$

Démonstration. La preuve du lemme 3.3.8 appliqué à $\nabla_h z \in D^{\psi=1}$ donne

$$\exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_{\nabla_h z}) \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1}p^{-n} \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\nabla_h z]_j.$$

Or, on remarque que $(\nabla - h + 1) \circ \ldots \circ (\nabla - 1) \circ \nabla(\sum_{j\geq 0} a_j t^j) = \sum_{j\geq h} a_j j(j-1)(j-2)\ldots(j-h+1)t^j$. L'opérateur $(\nabla-h+1)\circ\ldots(\nabla-1)$ a donc l'effet de tuer les coefficients plus petits que $h-1$. Comme $j \geq h$, on a

$$[\nabla_h\varphi^{-n}z]_j = \frac{j!}{(j-h)!}[\varphi^{-n}z]_j = \frac{p^{-nj}}{(j-h)!}[\varphi^{-n}\partial^j z]_0$$

Par ailleurs, en utilisant, respectivement, le lemme 3.3.7 et la définition de $\Lambda_{D,z}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\partial^j z]_0 &= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\partial^j z - p\varphi^{-(n-1)}\partial^j z]_0 \\
&= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)[\varphi^{-n}\partial^j(1-\varphi)z]_0 \\
&= \mathrm{G}(\eta) \cdot \Lambda_{D,z}(\eta\chi^j),
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

3.3.7 Interpolation des applications exponentielles

Des calculs du même genre montrent que

Proposition 3.3.10. *Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ un (φ,Γ)-module de de Rham, $z \in \Delta^{\psi=1}$, η un caractère de Dirichlet de conducteur p^n tel que $n \geq m(D)$ et $j \geq -h+1$ un entier tel que l'équation $\partial^j z_j = z$ a une solution dans Δ et tel que $\exp_{D(j)} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(j)) \to H^1(\mathbf{Q}_p, D(j))$*

soit un isomorphisme. On a alors l'égalité suivante dans $L_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^{-j}) = \frac{(-1)^{h+j-1}}{(h+j-1)!p^{n(j-1)}} \exp^{-1}\Big(\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_{\nabla_h z}\Big) \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee}$$

Démonstration. De la même façon que dans le lemme 3.3.8, on montre que

$$\exp^{-1}\Big(\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_{\nabla_h z}\Big) \otimes \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1} \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)a^j \exp^{-1}\Big(\int_{\Gamma_n} \chi^j \cdot \mu_{\nabla_h \sigma_a(z)}\Big).$$

Observons que, si $\partial^j z_j = z$, alors $\partial^j(a^{-j}\sigma_a z_j) = \sigma_a z$. En appliquant la loi de réciprocité (théorème 3.2.10), on voit que l'expression ci-dessus est égale à

$$(-1)^{h+j-1}(h+j-1)!p^{n(j-1)} \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)t^{-j}[\varphi^{-n}(\sigma_a z_j)]_0 \otimes t^{-j}e_j.$$

D'où

$$\frac{(-1)^{h+j-1}}{(h+j-1)!}p^{-n(j-1)} \exp^{-1}_{D(\eta\chi^j)}\Big(\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_{\nabla_h z}\Big) \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1} \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)t^{-j}[\varphi^{-n}(\sigma_a z_j)]_0.$$

Par le lemme 3.3.7, par le fait que ∂ est inversible sur $\Delta^{\psi=0}$ et qu'on a donc le droit d'écrire $(1-p^{-j}\varphi)z_j = \partial^{-j}(1-\varphi)z$, et on a

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}(z_j)]_0 &= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}((1-p^{-j}\varphi)z_j)]_0 \\
&= \sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\partial^{-j}(1-\varphi)z)]_0 \\
&= \mathrm{G}(\eta)\cdot\Lambda_{D,z}(\eta\chi^{-j}),
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Ceci finit la preuve du théoreme 3.3.3.

3.3.8 Le cas de poids de Hodge-Tate positifs

Soit $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$, de Rham à poids de Hodge Tate positifs et notons $\Delta = \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$. Fixons l'entier h égal au plus grand poids de Hodge-Tate. On a donc $D \subseteq N$ et, si $z \in D^{\psi=1}$, on peut appliquer la construction faite ci-dessus à l'élément z (et h) pour obtenir une application $\Lambda_{D,z}$. On commence par quelques remarques

Lemme 3.3.11. *Soient* $z \in D^{\psi=1}$, $\eta : \Gamma \to L^\times$ *un caractère localement analytique et*

$j \in \mathbf{Z}$. *On a*

$$\int_\Gamma \eta\chi^j \mu_{\nabla_h z} = (-\kappa(\eta) - j - h + 1)(-\kappa(\eta) - j - h + 2)\dots(-\kappa(\eta) - j) \int_\Gamma \eta\chi^j \mu_z.$$

En particulier, si η est localement constant, on a

$$\int_\Gamma \eta\chi^j \nabla_h \mu_z = (-j - h + 1)(-j - h + 2)\dots(-j) \int_\Gamma \eta\chi^j \mu_z.$$

Démonstration. Si $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, par définition de l'action de Γ sur $D^{\psi=1}$, on a

$$\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \sigma_a \mu_z = \eta(a)^{-1} a^{-j} \int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_z,$$

et, si $i \in \mathbf{Z}$, la formule $\nabla = \lim_{a\to 1} \frac{\sigma_a - 1}{a-1}$ donne

$$\int_\Gamma \eta\chi^j (\nabla - i) \cdot \mu_z = (\lim_{a\to 1} \frac{\eta(a)^{-1} a^{-j} - 1}{a - 1} - i) \int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_z = (-\eta'(1) - j - i) \int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_z,$$

ce qui permet de conclure car $\nabla_h = (\nabla - h + 1) \circ \dots \circ (\nabla - 1) \circ \nabla$. □

La proposition ci-dessus se généralise de la façon suivante. Soit $\lambda \in \mathscr{R}^+(\Gamma)$ un élément de l'algèbre de distributions sur Γ. Alors $D^{\psi=1}$ est un $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-module et, si $\xi : \Gamma \to L^\times$ est un caractère, on a

$$\int_\Gamma \xi(\gamma) \cdot \mu_{\lambda\cdot z} = (\int_\Gamma \xi(\gamma) \cdot \lambda) \cdot (\int_\Gamma \xi(\gamma) \cdot \mu_z).$$

Lemme 3.3.12. *Soient $z \in D^{\psi=1}$, η un caractère de Dirichlet de conducteur p^n et $j \geq 0$ assez grand*[18]. *Alors*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^{-j}) = p^{n(-j+1)} \Gamma^*(-j + 1) \cdot \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 3.3.10 et du lemme 3.3.11 ci-dessus. □

Lemme 3.3.13. *Soient $z \in D^{\psi=1}$, η et $j \geq 0$ comme dans la proposition 3.3.9. Alors*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = p^{n(j+1)} \Gamma^*(j + 1) \cdot \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z) \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee}.$$

Démonstration. Si l'on part de $z \in D^{\psi=1}$, les calculs faits dans la preuve de la proposition 3.3.9 marchent en posant $h = 0$ et donnent exactement le résultat cherché. □

On peut résumer ces résultats dans la forme énoncée au début de du chapitre

18. Il suffit que j soit plus grand que le plus grand poids de Hodge-Tate et assez grand de sorte que $\exp_{D(j)}$ soit bijective.

Théorème 3.3.14. *Soient D un (φ,Γ)-module de de Rham sur $\mathscr{R}$ à poids de Hodge-Tate positifs, $z \in D^{\psi=1}$. Il existe une fonction rigide analytique $\Lambda_{D,z} = \Lambda_{D,z,\eta} \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_D) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ telle que, si $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_D$, où η est d'ordre fini et $j \in \mathbf{Z}$ est tel que $j \geq 0$ ou $j \ll 0$, alors*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = \Gamma^*(j+1)p^{n(j+1)} \cdot \log(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee}.$$

3.4 Fonction L locale et accouplement d'Iwasawa

Dans la suite du chapitre, on étudie la fonction L p-adique associée à un élément dans la cohomologie d'Iwasawa en termes de l'accouplement d'Iwasawa sur les (φ,Γ)-modules défini par Colmez. On construit une distribution associée à un élément $z \in D^{\psi=1}$ (ou $\check{D}$ dénote le dual de Tate) qui dépend du choix d'un élément $\alpha \in \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(\check{D})^{\psi=1}$ (par exemple, si $D = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(f))^*(1)$, où $V(f)$ est la représentation galoisienne associée à une forme modulaire, cet élément joue le rôle du choix d'une racine du polynôme de Hecke en p de la forme, soit le choix d'une valeur propre du Frobenius cristallin). Cette construction est une généralisation directe de la construction de la fonction L p-adique d'une représentation dans le cas cristallin via les méthodes de Perrin-Riou. On montre finalement que la fonction ainsi construite satisfait une équation fonctionnelle comme conséquence de la loi de réciprocité.

Commençons par rappeler certaines opérations sur les (φ,Γ)-modules dont on aura besoin dans la suite, notamment un certain nombre d'accouplements jouant chacun un rôle important dans la correspondance de Langlands p-adique et dans les calculs qui suivent. Pour toute référence on renvoie le lecteur à [22] et [21]. On aura besoin de travailler avec des (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}$ et sur $\mathscr{E}$. Dans tout ce qui suit, D dénotera un (φ,Γ)-module étale de rang d sur $\mathscr{E}$, $D^\dagger$ le (φ,Γ)-module sur l'anneau $\mathscr{E}^\dagger$ d'éléments surconvergents de $\mathscr{E}$ associé à D par le théorème de surconvergence de Cherbonnier-Colmez, de sorte que $D = D^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathscr{E}$, et $D_{\mathrm{rig}} = D^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathscr{R} \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R})$.

3.4.1 Faisceaux P-équivariants

Les opérateurs de projection $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} = (1+T)\varphi^n \circ \psi^n(1+T)^{-i}$ sont compatibles dans un sens évident et permettent de voir naturellement tout (φ,Γ)-module comme un faisceaux P-équivariant sur $\mathbf{Z}_p$, où $P = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p-\{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dénote le mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$. Si $U \subseteq \mathbf{Z}_p$, on note $D \boxtimes U$ (resp. $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes U$) ses sections sur U. On a en particulier $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times = D^{\psi=0}$ (resp. $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times = D_{\mathrm{rig}}^{\psi=0}$).

3.4.2 Multiplicaton par une fonction continue

Si $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ est une fonction continue, $U \subseteq \mathbf{Z}_p$ un ouvert compact et $z \in D \boxtimes U$, la formule

$$m_\phi(z) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i \in U \bmod \mathrm{p^n}} \phi(i) \mathrm{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(z)$$

est bien définie et satisfait les propriétés que l'on espère par analogie avec la multiplication d'une mesure par une fonction.

Si $\delta \in \mathfrak{X}(L)$ est un caractère, on a construit sur $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=0}$ un opérateur analytique $\delta(\partial)$ de multiplication par δ que l'on note aussi $m_\delta = \delta(\partial)$.

3.4.3 Algèbres de distribution

Soit γ un générateur topologique de Γ. On définit les anneaux $\mathscr{E}(\Gamma)$, $\mathscr{R}(\Gamma)$, $\mathscr{R}^{[0,r_n]}(\Gamma)$, etc. de la même manière que $\mathscr{E}, \mathscr{R}, \mathscr{R}^{[0,r_n]}$, en remplaçant T par $\gamma - 1$.

3.4.4 Dual de Tate

On définit le dual de Tate $\check{D}$ de D (resp. $\check{D}_{\mathrm{rig}}$ de D_{rig}) par $\check{D} = \mathrm{Hom}_{\varphi,\Gamma}(D, \mathscr{E}\frac{dT}{1+T})$ (resp. $\check{D}_{\mathrm{rig}} = \mathrm{Hom}_{\varphi,\Gamma}(D_{\mathrm{rig}}, \mathscr{R}\frac{dT}{1+T})$), où $\mathscr{E}\frac{dT}{1+T}$ (resp. $\mathscr{R}\frac{dT}{1+T}$) est le (φ, Γ)-module étale de rang 1 de base $\frac{dT}{1+T}$ sur lequel φ et Γ agissent par les formules $\gamma(\frac{dT}{1+T}) = \chi(\gamma)\frac{dT}{1+T}$ si $\gamma \in \Gamma$, $\varphi(\frac{dT}{1+T}) = \frac{dT}{1+T}$. On note

$$\langle \ , \ \rangle : \check{D} \times D \to \mathscr{E}\frac{dT}{1+T} \quad (\text{resp. } \langle \ , \ \rangle : \check{D}_{\mathrm{rig}} \times D_{\mathrm{rig}} \to \mathscr{R}\frac{dT}{1+T})$$

l'accouplement naturel. Si $V = \mathbf{V}(D)$ est la représentation galoisienne associée à D, on a $\check{D} = \mathbf{D}(V^*(1))$.

Si $\mathscr{A} \in \{\mathscr{E}, \mathscr{E}^\dagger, \mathscr{R}\}$, tout (φ, Γ)-module étale de rang 1 est de la forme $\mathscr{A}(\delta)$ pour un certain caractère (unitaire) $\delta : \mathbf{Q}_p^\times \to L^\times$. On note $\det_D$ le caractère δ défini par $\wedge^d D \cong \mathscr{A}(\delta)$ et on pose $\omega_D(x) = (x|x|)^{-1}\det_D$. Dans le cas où D est de rang 2, on a une identification naturelle $D \otimes \omega_D^{-1} \xrightarrow{\sim} \check{D}$ [19] donnée par la formule

$$x \otimes e_{\omega_D^{-1}} \mapsto [y \mapsto (x \wedge y) \otimes e_{\omega_D^{-1}}].$$

3.4.5 Résidus

Rappelons que l'on a défini, pour $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \in \{\mathscr{E}, \mathscr{R}\}$, une application de résidu $\mathrm{rés}_0(f dT) = a_{-1}$. Si $x \in \check{D}_{(\mathrm{rig})}$ et $y \in D_{(\mathrm{rig})}$, la formule

$$\{x, y\} = \mathrm{rés}_0(\langle \sigma_{-1} x, y \rangle)$$

19. On a $D \otimes \omega_D^{-1} = D \otimes L \cdot e_{\omega_D^{-1}}$, où $e_{\omega_D^{-1}}$ dénote un élément muni d'une action du groupe Γ et d'un opérateur φ par les formules $\sigma_a(e_{\omega_D^{-1}}) = \omega_D^{-1}(a) \cdot e_{\omega_D^{-1}}$, $\varphi(e_{\omega_D^{-1}}) = \omega_D^{-1}(p) \cdot e_{\omega_D^{-1}}$

définit un accouplement parfait $\{\ ,\ \} : \check{D}_{(\mathrm{rig})} \times D_{(\mathrm{rig})} \to L$ identifiant $\check{D}_{(\mathrm{rig})}$ au dual topologique $D^*_{(\mathrm{rig})}$ de $D_{(\mathrm{rig})}$.

Si D est de dimension 2, on a, sous l'identification $\check{D} = D \otimes \omega_D^{-1}$, la formule [20]

$$\{x \otimes e_{\omega_D^{-1}}, y\} = \mathrm{rés}_0((\sigma_{-1}(x) \wedge y) \otimes e_{\omega_D^{-1}}).$$

3.4.6 Produit de convolution

Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathscr{E})$. En imitant la convolution entre deux mesures [21], pour toute application $\mathscr{E}$-bilinéaire et φ, Γ-équivariante $M : D_1 \times D_2 \to D_3$, la formule

$$M_{\mathbf{Z}_p^\times}(x, y) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i,j \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} (1+T)^{ij} \varphi^n(M(\sigma_i \cdot \psi^n((1+T)^{-j}x), \sigma_j \cdot \psi^n((1+T)^{-i}y))$$

définit une application $\mathscr{E}(\Gamma)$-bilinéaire

$$M_{\mathbf{Z}_p^\times} : (D_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times) \times (D_2 \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times) \to D_3 \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times.$$

Si $D_1 = D_2$ et M est symétrique (resp. antisymétrique), il en est de même pour $M_{\mathbf{Z}_p^\times}$.

L'accouplement $\langle\ ,\ \rangle : \check{D} \times D \to \mathscr{E}\frac{dT}{1+T}$ et $D \times D \to \wedge D$ induit en particulier un accouplement $\mathscr{E}(\Gamma)$-bilinéaire

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{Z}_p^\times} : (\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times) \times (D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times) \to \mathscr{E}\frac{dT}{1+T} \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$$

3.4.7 Dualité locale

Soit $n \geq 0$ et rappelons que l'on a posé $\tau_n(\gamma_n) = p^{-n} \log \chi(\gamma_n)$, $\tau_0(\gamma_0) = \frac{p-1}{p} \log \chi(\gamma_0)$. Notons $\gamma = \gamma_0$ dans la suite. Notons, pour $i \in \{0, 1\}$, $n \in \mathbf{N}$,

$$\cup : H^i_{\varphi,\gamma_n}(\check{D}_{(\mathrm{rig})}) \times H^{2-i}_{\varphi,\gamma_n}(D_{(\mathrm{rig})}) \to L$$

l'accouplement local, et rappelons que, si $V = \mathbf{V}(D)$, il coïncide (via les isomorphismes $H^i(F_n, V) \cong H^1_{\varphi,\gamma_n}(D_{(\mathrm{rig})})$) avec la dualité locale de Poitou-Tate. Si $\check{z} \in \check{D}^{\psi=1}_{(\mathrm{rig})}$, $z \in D^{\psi=1}_{(\mathrm{rig})}$ et $\eta : \Gamma \to L^\times$ est un caractère continu, un calcul avec le complexe de Herr et l'isomorphisme de Fontaine montre que

$$\left(\int_{\Gamma_n} \eta^{-1} \cdot \mu_{\check{z}}\right) \cup \left(\int_{\Gamma_n} \eta \cdot \mu_z\right) = \{(1-\varphi)\check{z}, \frac{\tau_n(\gamma_n)}{\eta(\chi(\gamma_n))\gamma_n - 1} \cdot (1-\varphi)z\}.$$

20. On voit ici l'élément $e_{\omega_D^{-1}}$ comme $e_{\det_D}^{-1} dT$, de sorte que, si $\sigma_{-1}(x) \wedge y = f \cdot e_{\det_D}$, alors $(\sigma_{-1}(x) \wedge y) \otimes e_{\omega_D^{-1}} = f dT$.

21. Si μ_1, μ_2 sont deux mesures, son produit de convolution est défini par la formule $\int_{\mathbf{Z}_p^\times} f(\mu_1 * \mu_2) = \int_{\mathbf{Z}_p^\times \times \mathbf{Z}_p^\times} f(xy)\mu_1(x)\mu_2(y)$. On pourrait aussi définir la convolution de deux mesures comme $\int_{\mathbf{Z}_p^\times} f(\mu_1 * \mu_2) = \int_{\mathbf{Z}_p^\times \times \mathbf{Z}_p^\times} f(x^{-1}y)\mu_1(x)\mu_2(y)$, ce qui donnerait des résultats complètement analogues.

3.4.8 Accouplement d'Iwasawa

Soient $\mathscr{C} = \mathscr{C}(D) = (1-\varphi)D \subseteq D^{\psi=0}$ le cœur de D et $\check{\mathscr{C}} = (1-\varphi)\check{D}^{\psi=1}$ celui de $\check{D}$. Ce sont des sous-Λ-modules libres de rang d et l'application naturelle $\mathscr{E}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C} \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$ (resp. $\mathscr{E}(\Gamma) \otimes_\Lambda \check{\mathscr{C}} \to \check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$) est un isomorphisme. Ces espaces sont les orthogonaux l'un de l'autre pour l'accouplement $\{\ ,\ \}$. Pour $x \in \check{\mathscr{C}}$, $y \in \mathscr{C}$, la formule

$$\langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \{\frac{\tau_n(\gamma_n)\sigma_i}{\gamma_n - 1}\cdot x, y\}$$

définit un accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}} : \check{\mathscr{C}} \times \mathscr{C} \to \Lambda$ qui identifie $\check{\mathscr{C}}$ à $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathscr{C}, \Lambda)$. Cet accouplement est l'analogue de l'accouplement usuel dans la théorie d'Iwasawa $(\ ,\ )_{\mathrm{Iw}}$: $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, \check{V}) \times H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \to \Lambda$ dans le sens que

$$((\mathrm{Exp}^*)^{-1}z, (\mathrm{Exp}^*)^{-1}z')_{\mathrm{Iw}} = \langle (1-\varphi)z, (1-\varphi)z'\rangle_{\mathrm{Iw}}$$

pour tous $z \in \check{D}^{\psi=1}$, $z' \in D^{\psi=1}$ et où, rappelons-le, $\mathrm{Exp}^* : H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V) \to D^{\psi=1}$ dénote l'isomorphisme de Fontaine.

Si $\eta \in \mathfrak{X}(L)$, l'application [22] $x \mapsto x \otimes e_\eta$ (resp. $x \mapsto x \otimes e_\eta^{-1}$) induit un isomorphisme de $\mathscr{C}(D)$ (resp. $\check{\mathscr{C}}(D)$) sur $\mathscr{C}(D\otimes\eta)$ (resp. $\check{\mathscr{C}}(D\otimes\eta)$) et on a

$$\langle x\otimes e_{\eta^{-1}}, y\otimes e_\eta\rangle_{\mathrm{Iw}} = m_{\eta^{-1}}\cdot\langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}.$$

Les isomorphismes $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times \cong \mathscr{E}(\Gamma)\otimes_\Lambda \mathscr{C}$ et $\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times \cong \mathscr{E}(\Gamma)\otimes_\Lambda\check{\mathscr{C}}$ permettent d'étendre l'accouplement défini ci-dessus en un accouplement

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}} : (\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times)\times(D\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times) \to \mathscr{E}(\Gamma).$$

Notons $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}} = (1-\varphi)D_{\mathrm{rig}}$ et $\check{\mathscr{C}}_{\mathrm{rig}} = (1-\varphi)\check{D}_{\mathrm{rig}}$. On a des isomorphismes naturels $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}} \cong \mathscr{R}^+(\Gamma)\otimes_\Lambda\mathscr{C}$ et $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times \cong \mathscr{R}(\Gamma)\otimes_{\mathscr{R}^+(\Gamma)}\mathscr{C}_{\mathrm{rig}} \cong \mathscr{R}(\Gamma)\otimes_\Lambda\mathscr{C}$ (et ses correspondants $\check{\mathscr{C}}_{\mathrm{rig}} \cong$ ...) qui permettent d'étendre par linéarité les différents accouplements définis ci-dessus en des accouplements

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{Z}_p^\times} : (\check{D}_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times)\times(D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times) \to \mathscr{R}\frac{dT}{1+T}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times$$

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}} : (\check{D}_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times)\times(D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times) \to \mathscr{R}(\Gamma).$$

Enfin, si $\eta : \Gamma \to L^\times$ est un caractère continu, on note

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\check{D}_{(\mathrm{rig})}(\eta^{-1}))\times\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D_{(\mathrm{rig})}(\eta)) \to L$$

22. Les éléments e_η et $e_{\eta^{-1}}$ dénotent des bases des modules $L(\eta)$ $L(\eta^{-1})$, munies d'une action triviale de φ et d'une action de Γ donnée par $\sigma_a(e_\eta) = \eta(a)\cdot e_\eta$, $\sigma_a(e_{\eta^{-1}}) = \eta^{-1}(a)\cdot e_{\eta^{-1}}$, $a\in\mathbf{Z}_p^\times$. Ces éléments apparaîtront très souvent dans le texte.

l'accouplement induit par la dualité entre $\check{D}_{(\mathrm{rig})}$ et $D_{(\mathrm{rig})}$ composé avec la trace de Tate normalisée.

Lemme 3.4.1. *Soient* $\check{z} \in \check{D}_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$, $z \in D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ *et* $\eta : \Gamma \to L^\times$ *un caractère continu. On a*

$$\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^j \cdot \langle (1-\varphi)\check{z}, (1-\varphi)z\rangle_{\mathrm{Iw}} = \begin{cases} \langle \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j}\cdot\mu_{\check{z}}), \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^j\cdot\mu_z)\rangle_{\mathrm{dR}} & si\ j \gg 0 \\ \langle \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^{-j}\cdot\mu_{\check{z}}), \exp^*(\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^j\cdot\mu_z)\rangle_{\mathrm{dR}} & si\ j \ll 0. \end{cases}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^j \cdot \langle \check{z}, z\rangle_{\mathrm{Iw}} &= \{\check{z}, \frac{-\log(\gamma)}{\eta^{-1}(\gamma)\chi(\gamma)^j\gamma - 1}\cdot z\} \\ &= \{(1-\varphi)\check{z}, \frac{-\log(\gamma)}{\eta^{-1}(\gamma)\chi(\gamma)^j\gamma - 1}\cdot (1-\varphi)z\} \\ &= (\int_\Gamma \eta\chi^{-j}\cdot\mu_{\check{z}}) \cup (\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^j\cdot\mu_z),\end{aligned}$$

où la dernière égalité suit de la description explicite de l'accouplement de Tate en termes de (φ, Γ)-modules. Le résultat suit du fait que, quand $j \gg 0$ (resp. $j \ll 0$), l'application exponentielle (resp. exponentielle duale) de Bloch-Kato est bijective, ce qui nous permet, en utilisant la loi de réciprocité de Kato, d'exprimer l'accouplement de Tate en termes de l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}}$. □

3.4.9 Involution et loi de réciprocité

L'involution décrite à continuation est à la base de la construction de la correspondance de Langlands p-adique et, comme nous le verrons plus loin, elle est étroitement liée au facteur epsilon de D. La formule

$$w_* = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \left(\begin{smallmatrix} -i^{-2} & i^{-1} \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\varphi^n \circ \psi^n((1+T)^{-i}z)$$

définit une involution sur $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times = D^{\psi=0}$.

Si D est de dimension 2, un résultat crucial affirme que l'involution w_* stabilise $D^\dagger \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$ et s'étend, par continuité, en une involution, aussi notée w_*, sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$.

Remarquons que w_* agit sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ et sur $\mathscr{C}_0(\mathbf{Z}_p)$ via les formules

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\cdot(w_*\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x^{-1})\cdot\mu, \quad (w_*\phi)(x) = -x^{-2}\phi(x^{-1}).$$

Identifions $\mathscr{R}(\Gamma)$ à $\mathscr{R}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times$ en étendant par linéarité l'isomorphisme d'Amice $\mathscr{R}^+(\Gamma) \cong \mathscr{R}^+\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times$ défini par $\mu \mapsto \int_\Gamma (1+T)^x\cdot\mu$ et notons $f \mapsto df = \partial f \frac{dT}{1+T}$ l'isomorphisme Γ-équivariant de $\mathscr{R}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times$ sur $\mathscr{R}\frac{dT}{1+T}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times$. Le résultat suivant permet d'étudier l'involution w_*.

Théorème 3.4.2 ([21], thm. I.5.5). *Si $\check{z} \in \check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$ et $z \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$, alors*

$$d(\langle \check{z}, z\rangle_{\mathrm{Iw}}) = -\langle w_* \check{z}, z\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times}.$$

3.4.10 Une fonction analytique sur l'espace des poids

Continuons avec les mêmes notations et soient $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{E})$ de dimension d, de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et $k \geq 1$, $\check{D}$ son dual de Tate, $D_{\mathrm{rig}}, \check{D}_{\mathrm{rig}}$ les modules sur l'anneau de $\mathscr{R}$ correspondants et notons $\check{\Delta} = \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(\check{D}) \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$. Soit $z \in D^{\psi=1}$ et fixons un élément $\check{z} \in \check{\Delta}^{\psi=1}$. On note $\alpha = \nabla \check{z} \in \check{D}^{\psi=1}$ (notons que $\check{D}$ est à poids de Hodge-Tate 1 et $1-k$ et donc $\mathrm{Fil}^{-1}\, \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\check{D}) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\check{D})$). Soit $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L$ un caractère assez ramifié de sorte qu'il satisfait les hypothèses du théorème 3.3.3. Posons

$$L_{z,\alpha}(\eta, s) = p^{-n} \langle \Lambda_{\check{D}, \sigma_{-1}(\alpha)}(\eta\chi^s), \Lambda_{D,z}(\eta^{-1}\chi^{-s})\rangle_{\mathrm{dR}}$$

qui est, d'après les hypothèses que l'on a fait sur η, une fonction localement analytique en s.

Proposition 3.4.3. *On a un égalité*

$$L_{z,\alpha}(\eta, s) = \int_\gamma \eta^{-1}\chi^s \langle \alpha, z\rangle_{\mathrm{Iw}}$$

Démonstration. Si $j \gg 0$, en remplaçant chaque terme par ce que donne les propositions 3.3.9 et 3.3.14 et en utilisant la formule $G(\eta)G(\eta^{-1}) = \eta(-1)p^n$, on voit que $\langle \Lambda_{\check{D},\alpha}(\eta^{-1}\chi^j), \Lambda_{D,z}(\eta\chi^{-j})\rangle_{\mathrm{dR}}$ coïncide avec

$$p^n(-1)^j \eta(-1) \langle \exp^*(\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^{-j} \cdot \mu_\alpha), \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_z)\rangle_{\mathrm{dR}},$$

et on conclut en appliquant le lemme 3.4.1 et la définition de $L_{z,\alpha}(\eta, s)$. □

Corollaire 3.4.4. *La fonction $L_{z,\alpha}$ admet un prolongement analytique $L_{z,\alpha} \in \mathcal{O}(\mathfrak{X})$ à tout l'espace des poids.*

Remarque 3.4.5. Si D est cristallin, les isomorphismes

$$(\mathscr{R} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\check{D}))^{\psi=0} = \check{\Delta}^{\psi=0} = \mathscr{R}(\Gamma) \otimes_{\mathscr{R}^+(\Gamma)} (1-\varphi)\check{\Delta}^{\psi=1}$$

nous fournissent un choix particulièrement simple de $\check{z}$, à savoir le terme dans le module de droite correspondant à $\mathrm{Dir}_1 \otimes \lambda$, où Dir_1 dénote la masse de Dirac en 1 et $\lambda \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\check{D})$ est un vecteur propre pour le Frobenius cristallin.

3.4.11 Une première équation fonctionnelle

On s'attend à que la fonction $L_{z,\alpha}$ satisfasse une équation fonctionnelle. Celle de la proposition 3.4.8 est la première et plus simple parmi une série d'équations fonctionnelles que l'on trouvera dans les chapitres ultérieurs, elles sont toutes étroitement liés à l'involution w_* et donc a la correspondance de Langlands p-adique, ce qui explique que les résultats en toute généralité ne seront démontrés qu'en dimension 2, qui est pour l'instant le seul cas où on connait une telle correspondance.

On aura besoin dans la suite de travailler au niveau entier. Le (φ,Γ)-module D possède un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau stable et, en multipliant par une puissance adéquate de p, on peut supposer que ce réseau contient les éléments z et α choisis plus haut.

Lemme 3.4.6. *Soit $D\in\Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ et soient $x\in\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times$, $y\in D\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times$. Alors*

$$w_*\langle x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times}=\langle w_*x,w_*y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times}.$$

Démonstration. Si $x\in\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times$ et $y\in D\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times$, on a (3.4.6)

$$\langle x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i,j\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times}(1+T)^{ij}\langle\sigma_i(1+T)^{-j}\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p}(x),\sigma_j(1+T)^{-i}\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(y)\rangle$$

et, pour $z\in\{\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times, D\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times,\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}\boxtimes\mathbf{Z}_p^\times\}$, on a (3.4.9)

$$w_*z=\lim_{n\to+\infty}\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times}(1+T)^{a^{-1}}\sigma_{-a^{-2}}\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}((1+T)^{-a}z).$$

Les deux identités ci-dessus montrent que $\langle w_*x,w_*y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times}$ est donné par la formule

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i,j\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times}(1+T)^{ij}\langle\sigma_i(1+T)^{-j}\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p}(w_*x),\sigma_j(1+T)^{-i}\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(w_*y)\rangle$$

et, vu que chaque terme de la somme définissant w_*x (resp. w_*y) est supportée dans $a^{-1}+p^n\mathbf{Z}_p$, on a $\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p}(w_*x)=(1+T)^j\sigma_{-j^2}\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}((1+T)^{-j^{-1}}x)$ (resp. $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(w_*y)=(1+T)^i\sigma_{-i^2}\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}((1+T)^{-i^{-1}}y)$). On en déduit la formule suivant pour $\langle w_*x,w_*y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i,j\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times}(1+T)^{ij}\langle\sigma_{-ij^2}\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}((1+T)^{-j^{-1}}x),\sigma_{-ji^2}\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}((1+T)^{-i^{-1}}y)\rangle$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}w_*\langle x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times}&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times}(1+T)^{a^{-1}}\sigma_{-a^{-2}}\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}((1+T)^{-a}\langle x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times})\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times}(1+T)^{a^{-1}}\sigma_{-a^{-2}}(1+T)^{-a}\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(\langle x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times}),\end{aligned}$$

où la deuxième égalité suit de l'identité $\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}((1+T)^b z) = (1+T)^b \mathrm{Res}_{a-b+p^n\mathbf{Z}_p}(z)$, $a, b \in \mathbf{Z}_p/p^n\mathbf{Z}_p$. Or, $\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(\langle x, y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times})$ est donné par

$$\sum_{i,j}(1+T)^{ij}\mathrm{Res}_{a-ij+p^n\mathbf{Z}_p}\langle \sigma_i(1+T)^{-j}\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p}(x), \sigma_j(1+T)^{-i}\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(y)\rangle$$

$$= \sum_{ij=a}(1+T)^{ij}\langle \sigma_i(1+T)^{-j}\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p}(x), \sigma_j(1+T)^{-i}\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(y), \rangle$$

où on a utilisé le fait que le terme $\langle \sigma_i(1+T)^{-j}\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p}(x), \sigma_j(1+T)^{-i}\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(y)\rangle$ est supporté dans $p^n\mathbf{Z}_p$ et seulement le terme $ij = a$ survit dans la somme. On en déduit donc que $w_*\langle x, y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times}$ est donné par la formule suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{a,i\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times}(1+T)^{a^{-1}}\sigma_{-a^{-2}}\langle \sigma_i(1+T)^{-ai^{-1}}\mathrm{Res}_{ai^{-1}+p^n\mathbf{Z}_p}(x), \sigma_{ai^{-1}}(1+T)^{-i}\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(y)\rangle$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{a,i\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times}(1+T)^{a^{-1}}\langle \sigma_{-ia^{-2}}\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}((1+T)^{-ai^{-1}}x), \sigma_{-(ai)^{-1}}\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}((1+T)^{-i}y)\rangle$$

et on conclut en faisant le changement de variables $(i, a) \mapsto (i^{-1}, a^{-1}i)$. □

Lemme 3.4.7. *Soient $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ et $z \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$. Alors*

— *Pour $\delta : \mathbf{Q}_p^\times \to \mathscr{O}_L^\times$ un caractère continu, on a*

$$w_*(z \otimes e_\delta) = (\delta(-1)m_{\delta^2} \circ w_*(z)) \otimes e_\delta.$$

— $w_* \circ \partial = \partial^{-1} \circ w_*$.

Démonstration. Le premier point est le corollaire V.5.2 de [22]. Le deuxième suit de [24], prop 3.6 (voir aussi 4.3.4 plus loin). □

Proposition 3.4.8. *Soit $D \in \Phi\Gamma^{ét}(\mathscr{E})$ de dimension 2. Soient $z \in D^{\psi=1}$, $\check{z} \in \check{D}^{\psi=1}$ et $\alpha = \nabla\check{z}$ comme ci-dessus. Notons $L_{w_*z,w_*\alpha}$ la fonction que l'on obtient en accouplent $\Lambda_{D,w_*((1-\varphi)z)}$ et $\Lambda_{\check{D},w_*((1-\varphi)\alpha)}$. Alors, pour tout $\xi \in \mathfrak{X}$, on a*

$$L_{z,\alpha}(\xi) = -L_{w_*z,w_*\alpha}(\xi^{-1})$$

Démonstration. Par densité de Zariski, il suffit de montrer le résultat pour les caractères de la forme χ^j. Notons que $D^{\psi=1} \subseteq (D^\dagger)^{\psi=1} \subseteq D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$. On a

$$L_{z,\alpha}(\chi^j) = \int_\Gamma \chi^s\langle \alpha, z\rangle_{\mathrm{Iw}} = \int_\Gamma \chi^{-j}w_*\langle \alpha, z\rangle_{\mathrm{Iw}}.$$

Notons $y = (1-\varphi)z \in D^{\psi=0}$, $y' = (1-\varphi)\alpha \in \check{D}^{\psi=0}$. On a alors

$$\begin{aligned}
d\langle w_* y', w_* y\rangle_{\mathrm{Iw}} &= -\langle y', w_* y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times} \quad \text{(théorème 3.4.2)}\\
&= -w_*\langle w_* y', y\rangle_{\mathbf{Z}_p^\times} \quad \text{(lemme 3.4.6)}\\
&= w_*(\partial\langle y', y\rangle_{\mathrm{Iw}} \otimes e_\chi) \quad \text{(théorème 3.4.2 encore)}\\
&= (\chi(-1)m_{\chi^2} \circ w_*(\partial\langle y', y\rangle_{\mathrm{Iw}}) \otimes e_\chi \quad \text{(lemme 3.4.7)}\\
&= -m_{\chi^2}\partial^{-1} w_*\langle y', y\rangle_{\mathrm{Iw}} \frac{dT}{1+T} \quad \text{(lemme 3.4.7)}\\
&= -\partial w_*\langle y', y\rangle_{\mathrm{Iw}} \frac{dT}{1+T} \quad (\partial \text{ coïncide avec la multiplication par } \chi \text{ sur } \mathbf{Z}_p^\times)
\end{aligned}$$

(notons que l'on voit $\frac{dT}{1+T}$ comme e_χ et vice-versa). Ceci implique (car ∂ est injectif sur $\mathscr{R}\frac{dT}{1+T} \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$) que

$$\langle w_* y', w_* y\rangle_{\mathrm{Iw}} = -w_*\langle y', y\rangle_{\mathrm{Iw}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
L_{z,\alpha}(\eta, j) &= \int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot w_*\langle \alpha, z\rangle_{\mathrm{Iw}} = \int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot w_*\langle y', y\rangle_{\mathrm{Iw}}\\
&= -\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \langle w_* y', w_* y\rangle_{\mathrm{Iw}} = -L_{w_* z, w_*\alpha}(\eta^{-1}, -j),
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Remarque 3.4.9.

— L'argument ci-dessus ne marche qu'en dimension deux à cause de l'absence d'une involution sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$. On ne sait pas si l'involution w_* sur $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$ préserve ou non la surconvergence.

— On remarque l'égalité suivante, qui a été démontrée dans la preuve de la proposition 3.4.8 ci-dessus, et peut avoir un intérêt indépendant du reste des calculs :

$$\langle w_*(1-\varphi)\check{z}, w_*(1-\varphi)z\rangle_{\mathrm{Iw}} = -w_*\langle \check{z}, z\rangle_{\mathrm{Iw}}, \quad \check{z} \in \check{D}^{\psi=0}, z \in D^{\psi=0}.$$

Chapitre 4

Correspondance de Langlands p-adique et équation fonctionnelle en dimension 2

On a vu que la distribution $L_{z,\alpha}$ satisfait une équation fonctionnelle grâce à la loi de réciprocité. On s'attend aussi à ce que la fonction $\Lambda_{D,z}$ définie précédemment satisfasse aussi une équation fonctionnelle. En s'inspirant des idées de Nakamura ([49]) et des techniques de changement de poids ([24]), on démontre l'équation fonctionnelle de $\Lambda_{D,z}$ quand D est de dimension 2. Sa démonstration est nettement plus compliquée que celle de la fonction $L_{z,\alpha}$. En fait, l'accouplement dans la définition de cette dernière fonction a l'effet de tuer les facteurs epsilon apparaissant dans l'équation fonctionnelle, ce qui explique sa simplicité.

4.1 Notations

Soit $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R})$ de dimension 2, de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et k que l'on suppose non triangulin [1] et notons $\Delta = \mathbf{N}_{\text{rig}}(D)$, qui est à poids de Hodge-Tate tous nuls.

Étendons un peu les notations de 3.3.3. Si $\delta : \mathbf{Q}_p^\times \to L^\times$ est un caractère, on note e_δ une base du module $L(\delta)$ muni d'actions de φ et Γ via les formules $\varphi(e_\delta) = \delta(p) \cdot e_\delta$ et $\sigma_a(e_\delta) = \delta(a) \cdot e_\delta$, $a \in \mathbf{Z}_p^\times$. On note $D(\delta) = D \otimes \delta$ le module $D \otimes_L L(\delta)$. Le choix de e_δ fournit un isomorphisme de L-espaces vectoriels $D \xrightarrow{\sim} D(\delta) : x \mapsto x \otimes e_\delta$.

Soient $\omega_D = (\det_D)\chi^{-1}$ et $\omega_\Delta = (\det_\Delta)\chi^{-1}$. Le fait d'être en dimension 2 nous permet d'identifier $\check{D} = D \otimes \omega_D^{-1}$ comme dans 3.4.4. Comme les poids de Hodge-Tate de D sont 0 et k, et ceux de Δ sont nuls, le caractère $\det_\Delta$ est localement constant et $\omega_D = \omega_\Delta x^k$ (et

1. D'après Kedlaya, tout (φ, Γ) module sur $\mathscr{R}$ est étale à torsion près par un caractère ou triangulin. Dans ce dernier cas les calculs qui suivent sont déjà connus et l'hypothèse de non triangularité n'est pas donc restrictive.

$\det_D = x^k \det_\Delta$). Notons $e_D = e_{\det_D}$.

Si $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ est un caractère localement constant, vu comme un caractère de $\mathbf{Q}_p^\times$ en posant $\eta(p) = 1$, rappelons que l'on a un générateur $\mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}} = G(\eta)e_\eta$ du module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\eta))$, que $e_\eta^\vee = e_{\eta^{-1}}$ dénote la base de $L(\eta)^*$ duale de e_η, et que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\eta)^*) = L \cdot G(\eta)^{-1}e_\eta^\vee = L \cdot G(\eta^{-1})e_{\eta^{-1}}$. Ceci fournit deux bases $\mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1}e_\eta^\vee$ et $\mathbf{e}_{\eta^{-1}}^{\mathrm{dR}} = G(\eta^{-1})e_{\eta^{-1}}$ du module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\eta)^*) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\eta^{-1}))$, reliées par la formule $p^n\eta(-1)\mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR},\vee} = \mathbf{e}_{\eta^{-1}}^{\mathrm{dR}}$.

On aura besoin de jongler un peu avec des éléments habitant dans le module de de Rham des différents tordus de D et de son dual de Tate et les identifications suivantes permettent de voir tous ces éléments dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$. Fixons une base f_1, f_2 de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ et notons

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \times \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \to L,$$

le produit scalaire défini par la formule $\langle a_1f_1 + a_2f_2, b_1f_1 + b_2f_2\rangle_{\mathrm{dR}} = a_1b_1 + a_2b_2$.

L'isomorphisme $\wedge^2 D = (\mathscr{R}\frac{dT}{1+T}) \otimes \omega_D$ induit un isomorphisme

$$\wedge^2\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}((\mathscr{R}\frac{dT}{1+T}) \otimes \omega_D) = (t^{-k}L_\infty e_D)^\Gamma.$$

On définit $\Omega \in L_\infty$ par la formule $f_1 \wedge f_2 = (t^k\Omega)^{-1}e_D$, ce qui nous permet de fixer les bases $(t^k\Omega)^{-1}e_D$ et $t^k\Omega e_D^\vee$ du module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\wedge^2 D)$ et de son dual. On fixe aussi les bases $\mathrm{e}_{\omega_D}^{\mathrm{dR}} = (t^{k-1}\Omega)^{-1}e_{\omega_D}$ et $\mathbf{e}_{\omega_D}^{\mathrm{dR},\vee} = (t^{k-1}\Omega)e_{\omega_D}^\vee$ du module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\omega_D))$ et de son dual.

Enfin, afin d'alléger les notations dans les calculs futurs, notons, pour η comme ci-dessus et $j \in \mathbf{Z}$,

$$\mathbf{e}_{\eta,j,\omega_D^\vee} = e_\eta \otimes e_j \otimes e_{\omega_D}^\vee, \quad \mathbf{e}_{\eta,j} = e_\eta \otimes e_j,$$

bases de $L(\eta\chi^j\omega_D^{-1})$ et $L(\eta\chi^j)$ respectivement, et leurs duales

$$\mathbf{e}_{\eta,j,\omega_D^\vee}^\vee = e_\eta^\vee \otimes e_{-j} \otimes e_{\omega_D}, \quad \mathbf{e}_{\eta,j}^\vee = e_\eta^\vee \otimes e_{-j},$$

Ainsi que des bases des module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\eta\chi^j\omega_D^{-1}))$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{R}(\eta\chi^j))$

$$\mathbf{e}_{\eta,j,\omega_D^\vee}^{\mathrm{dR}} = G(\eta)e_\eta \otimes t^{-j}e_j \otimes t^{k-1}\Omega e_{\omega_D}^\vee = \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_{\omega_D}^{\mathrm{dR},\vee},$$

$$\mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}} = G(\eta)e_\eta \otimes t^{-j}e_j = \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}}$$

et leurs duales

$$\mathbf{e}_{\eta,j,\omega_D^\vee}^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1}e_\eta^\vee \otimes t^je_{-j} \otimes (t^{k-1}\Omega)^{-1}e_{\omega_D} = \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR},\vee} \otimes \mathbf{e}_{-j}^{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_{\omega_D^\vee}^{\mathrm{dR},\vee},$$

$$\mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee} = G(\eta)^{-1}e_\eta^\vee \otimes t^je_{-j} = \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR},\vee} \otimes \mathbf{e}_{-j}^{\mathrm{dR}},$$

et les variantes évidentes qu'on peut imaginer.

Par exemple, si $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ est un caractère d'ordre fini, si $j \geq 0$ et si $x \in$

$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\check{D}(\eta\chi^{-j}))$, on écrira $x \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_D^\vee} \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ l'image de x par l'isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\check{D}(\eta\chi^{-j})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D); \quad x \mapsto x \otimes G(\eta)^{-1} e_\eta^\vee \otimes t^{-j} e_j \otimes (t^{k-1}\Omega)^{-1} e_{\omega_D}$$

et de même, si $x \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(\eta^{-1}\chi^j))$, on notera $x \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta^{-1},j} \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ l'image de x par l'isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(\eta^{-1}\chi^j)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D); \quad x \mapsto x \otimes G(\eta^{-1})^{-1} e_{\eta^{-1}}^\vee \otimes t^j e_{-j}.$$

Remarque 4.1.1.

— Les bases des modules de de Rham ainsi définies héritent une action de l'opérateur φ. On a, par exemple,

$$\varphi(\mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}}) = \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR}}, \quad \varphi(\mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}}) = p^{-j}\mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}},$$

$$\varphi(\mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,j,\omega_D^\vee}) = p^{-j+k-1}\omega_D^{-1}(p) \cdot \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,j,\omega_D^\vee} = p^{-j-1}\omega_\Delta^{-1}(p) \cdot \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,j,\omega_D^\vee}.$$

— Il faut faire un peu d'attention et distinguer le caractère identité x et le caractère cyclotomique $\chi = x|x|$. Les deux coïncident sur $\mathbf{Z}_p^\times$ mais $\chi(p) = 1$, tandis que le premier prend la valeur p. Par exemple, Γ agit trivialement sur l'élément $e_j \otimes e_{x^j}^\vee$ mais il possède une action non-trivial de φ.

4.2 Représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

4.2.1 Facteurs epsilon pour GL_1

Commençons par rappeler la définition des facteurs locaux associés à un caractère. Soit $\eta : \mathbf{Q}_p^\times \to L^\times$ un caractère continu. On dit que η est non ramifié si sa restriction à $\mathbf{Z}_p^\times$ est triviale et il est ramifié dans le cas contraire. On définit son conducteur par 0 s'il est non ramifié, et par p^n, où n est le plus petit entier tel que la restriction $\eta\mid_{1+p^n\mathbf{Z}_p}$ soit triviale, dans le cas contraire. Le choix d'un système compatible $(\zeta_{p^n})_{n\geq 0}$ de racines de l'unité nous permet de fixer un caractère additif $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p, L_\infty^\times)$ de niveau 0 (i.e $\ker\psi = \mathbf{Z}_p$) par la formule $\psi(x) = \zeta_{p^n}^{p^n x}$ pour n'importe quel $n \geq v_p(x)$. Fixons aussi $d\mu$ la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p$ telle que $\mu(\mathbf{Z}_p) = 1$. Soit μ^* une mesure de Haar de $\mathbf{Q}_p^\times$. Pour $\phi \in \mathrm{LC_c}(\mathbf{Q}_p, L)$ une fonction localement constante à support compact dans $\mathbf{Q}_p$, la fonction

$$\zeta(\phi,\eta,s) = \int_{\mathbf{Q}_p^\times} \phi(x)\eta(x)|x|^s d\mu^*(x)$$

converge pour Re $s \gg 0$ et admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ tout entier. Les facteurs L et ε associés à η sont donnés par les formules [2]

$$L(\eta,s)=\begin{cases}(1-\eta(p)p^{-s})^{-1} & \text{si } \eta \text{ n'est pas ramifié}\\ 1 & \text{si } \eta \text{ est ramifié}\end{cases}$$

$$\varepsilon(\eta,s)=\begin{cases}1 & \text{si } \eta \text{ n'est pas ramifié}\\ p^{-ns}\eta(p)^n G(\eta^{-1}) & \text{si } \eta \text{ est ramifié}\end{cases}$$

Le facteur epsilon satisfait l'équation fonctionnelle

$$\varepsilon(\eta,s)\varepsilon(\eta^{-1},1-s)=\eta(-1).$$

Enfin, on a une équation fonctionnelle pour tout $\phi \in \mathrm{LC_c}(\mathbf{Q}_p, L)$, où les deux membres sont des polynômes en p^{-s},

$$\frac{\zeta(\hat{\phi},\eta^{-1},1-s)}{L(\eta^{-1},1-s)}=\varepsilon(\eta,s)\frac{\zeta(\phi,\eta,s)}{L(\eta,s)},$$

où $\hat{\phi}=\int_{\mathbf{Q}_p}\phi(y)\psi(xy)d\mu(y)$ dénote la transformée de Fourier de ϕ.

4.2.2 Facteurs epsilon pour GL_2

Soit π une représentation lisse irréductible de $G=\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et notons $\check{\pi}$ sa contragrédiente. Notons $K=\mathrm{M}_2(\mathbf{Z}_p)$ et $A=\mathrm{M}_2(\mathbf{Q}_p)$, $\mathrm{LC_c}(A,L)$ les fonctions localement constantes à support compact dans A et $\mathfrak{C}(\pi)$ l'espace des coefficients de la représentation π : c'est le L espace vectoriel engendré par les fonctions $g\in G\mapsto \langle \check{v}, g\cdot v\rangle$, $v\in\pi, \check{v}\in\check{\pi}$. Si $\eta : \mathbf{Q}_p^\times \to L^\times$ est un caractère localement constant, on note $\pi\otimes\eta$ [3] la tordue de π par η : si $v\in\pi$ et $g\in G$ alors $g(v\otimes e_\eta)=\eta(\det g)(gv\otimes e_\eta)$. On suppose dans la suite que π est une représentation supercuspidale (ce qui explique l'absence des facteurs L dans la suite).

Fixons $d\mu$ la mesure de Haar sur A normalisée par $\mu(K)=1$. La transformée de Fourier définie par

$$\phi\in\mathrm{LC_c}(A,L)\mapsto\hat{\phi}(g)=\int_A\phi(h)\psi(\mathrm{tr}(gh))d\mu(h)$$

est alors auto-duale : $\hat{\hat{\phi}}(x)=\phi(-x)$. Enfin, si $f\in\mathfrak{C}(\pi)$, la formule $\check{f}(g)=f(g^{-1})$ définit un élément $\check{f}$ dans $\mathfrak{C}(\hat{\pi})$. La fonction

$$\zeta(\phi,f,s)=\int_G\phi(g)f(g)||\det g||^s d\mu^*(g),\quad \phi\in\mathrm{LC_c}, f\in\mathfrak{C}(\pi),$$

2. cf. [12] 23.4 pour la première formule et 23.5 thm. et lemme 1 pour se ramener au cas du caractère ψ de niveau zero pour la deuxième.

3. On voit e_η comme un générateur du L espace vectoriel de dimension 1 que l'on munit d'une action de G par la formule $g\cdot e_\eta=\eta(\det g)e_\eta$. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels $v\mapsto c\otimes e_\eta$ de π sur $\pi\otimes\eta$.

où μ^* est une mesure de Haar sur G, converge pour Re $s \gg 0$ et définit une fonction rationnelle en la variable p^{-s}.

Il existe $\varepsilon(\pi) \in L$ tel que, si l'on pose $\varepsilon(\pi, s) = p^{-c(\pi)(s-1/2)}\varepsilon(\pi)$, où $c(\pi)$ est le conducteur de π [4], alors pour tous $\phi \in \mathrm{LC_c}(A, L)$ et $f \in \mathfrak{C}(\pi)$, on a une équation fonctionnelle

$$\zeta(\hat{\phi}, \check{f}, \frac{3}{2} - s) = \varepsilon(\pi, s)\zeta(\phi, f, \frac{1}{2} + s).$$

Observons que, si $j \in \mathbf{Z}$, alors $p^{-c(\pi)j}\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\pi \otimes |\cdot|^j)$. La fonction $\varepsilon(\pi, s)$ est le facteur epsilon associé à la représentation π. Lui aussi satisfait une équation fonctionnelle

$$\varepsilon(\pi, s)\varepsilon(\check{\pi}, 1 - s) = \omega_\pi(-1),$$

où ω_π est le caractère central de la représentation π.

Proposition 4.2.1. *Soit η un caractère de $\mathbf{Q}_p^\times$ de conducteur p^n pour $n > c(\pi)$ et soit $c_\eta \in \mathbf{Q}_p^\times$ satisfaisant $\eta(1 + x) = \psi(c_\eta x)$ pour $x \in p^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$. Alors*

$$\varepsilon(\pi \otimes \eta, s) = \omega_\pi(c_\eta)^{-1}\varepsilon(\eta, s)^2.$$

Démonstration. Par [12], 25.7 thm., on a $\varepsilon(\pi \otimes \eta^{-1}, s) = \omega_\pi(c_\eta)^{-1}\varepsilon(\eta \circ \det, s)$. Or, la représentation $\eta \circ \det$ apparaît comme facteur irréductible de l'induite unitaire lisse $\iota_B^G(|x|^{1/2}\eta \otimes |x|^{-1/2}\eta) = \mathrm{Ind}_B^G(\eta \otimes \eta)$ de la représentation $|x|^{1/2}\eta \otimes |x|^{-1/2}\eta$ de B (cf. [12], 9.11), et [12], 26.1, thm. implique que $\varepsilon(\eta \circ \det, s) = \varepsilon(|x|^{1/2}\eta, s)\varepsilon(|x|^{-1/2}\eta, s)$. On conclut en remarquant que $\varepsilon(|x|^{1/2}\eta, s) = p^{-n/2}\varepsilon(\eta, s)$ et $\varepsilon(|x|^{-1/2}\eta, s) = p^{-n/2}\varepsilon(\eta, s)$, comme on le voit de la formule $\varepsilon(|x|^{\pm 1/2}\eta, s) = p^{-ms}\eta(p)^m|p|^{\pm m/2}G(|x|^{\pm 1/2}\eta)$, où $m = \mathrm{cond}(|x|^{\pm 1/2}\eta)$, et en remarquant que $m = \mathrm{cond}(\eta) = n$ et $G(|x|^{\pm 1/2}\eta) = G(\eta)$ car la restriction à $\mathbf{Z}_p^\times$ de $|x|^{\pm 1/2}$ est triviale. □

4.2.3 Modèle de Kirillov

Rappelons qu'un modèle de Kirillov d'une représentation lisse π de caractère central ω_π est une injection B-équivariante de π dans l'espace $\mathrm{LC_{rc}}(\mathbf{Q}_p^\times, L_\infty)$ des fonctions localement constantes sur $\mathbf{Q}_p^\times$ à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ [5]. L'action du Borel sur ce dernier espace est donnée par la formule

$$(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \phi)(x) = \omega_\pi(d)\psi(bx/d)\phi(ax/d).$$

La décomposition de Bruhat $G = B \cup BwN$ montre que l'action de G est déterminée par celle du mirabolique et par l'action de l'involution $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

4. Le conducteur $c(\pi)$ est défini comme le plus petit entier n tel que π possède un élément fixe par les matrices de la forme $K_n = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in K,\ c = d - 1 = 0 \bmod p^n\}$. On a $\dim_L \pi^{K_{c(\pi)}} = 1$.

5. rc dénote "relativement compact".

Si $\eta : \mathbf{Q}_p^\times \to L^\times$ est un caractère localement constant et $m \in \mathbf{Z}$, on définit une fonction $\xi_{\eta,m} \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^\times, L_\infty)$ par la formule

$$\xi_{\eta,m}(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si } v_p(x) = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 4.2.2 ([12], thm. 37.3). *Soit $\eta : \mathbf{Q}_p^\times \to L^\times$ un caractère et soit $m \in \mathbf{Z}$. Alors*

$$(w \cdot \xi_{\eta,m})(x) = \eta(-1)\omega_\pi(-1) \cdot \varepsilon(\pi \otimes \eta^{-1})\xi_{\eta^{-1}\omega_\pi, -c(\pi\otimes\eta^{-1})-m}(x).$$

Remarque 4.2.3. La formule de [12], thm. 37.3 est

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \xi_{\eta,m} = \varepsilon(\pi \circ \eta^{-1})\xi_{\eta^{-1}\omega_\pi, -c(\pi\otimes\eta^{-1})-m}.$$

Observons que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w$, et que les matrices $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ agissent, respectivement, par multiplication par $\omega_\pi(-1)$ et par $(\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \phi)(x) = \phi(-x)$, d'où

$$\begin{aligned} w \cdot \xi_{\eta,m} &= \varepsilon(\pi \circ \eta^{-1})\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \xi_{\eta^{-1}\omega_\pi, -c(\pi\otimes\eta^{-1})-m} \\ &= \varepsilon(\pi \circ \eta^{-1})\omega_\pi(-1)\eta(-1)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \xi_{\eta^{-1}\omega_\pi, -c(\pi\otimes\eta^{-1})-m} \\ &= \eta(-1)\varepsilon(\pi \circ \eta^{-1})\xi_{\eta^{-1}\omega_\pi, -c(\pi\otimes\eta^{-1})}. \end{aligned}$$

4.3 Autour de la correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

4.3.1 La correspondance

Rappelons brièvement la construction de la correspondance de Langlands p-adique (cf. [22], [21], [24]). Soit $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$. Rappelons que $D^\sharp$ désigne le plus grand sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module compact de D stable par ψ et sur lequel ψ est surjectif, et $D^\natural$ est le plus petit sour-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module compact de D stable par ψ et engendrant D. Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{E})$ et $D_0 \subseteq D$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau stable par φ et Γ, on pose $D^\sharp = L \otimes_{\mathscr{O}_L} D_0^\sharp$, $D^\natural = L \otimes_{\mathscr{O}_L} D_0^\natural$. Si D est absolument irréductible, on a $D^\natural = D^\sharp$.

Soit $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Rappelons que D peut être vu naturellement comme un faisceau équivariant pour l'action du mirabolique. Soient $w_D = m_{\omega_D^{-1}} \circ w_* : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$, où $m_{\omega_D^{-1}}$ est la multiplication par ω_D^{-1}, et $w_* : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$, définies dans le chapitre précédent (cf. 3.3.2 et 3.4.9). En s'inspirant des formules provenant de l'analyse p-adique, on construit un faisceau G-équivariant $U \mapsto D \boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ dont les sections globales sont données par

$$D \boxtimes \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D \times D : w_D(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^\times}(z_1)) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^\times}(z_2)\}$$

et les sections sur $\mathbf{Z}_p$ sont $D \boxtimes \mathbf{Z}_p = D$. On définit le module $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 = \{z \in D \boxtimes \mathbf{P}^1 : \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}((\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \cdot z) \in D^\natural \quad \forall n \in \mathbf{Z}\}$. Ce module est stable par l'action de G et on pose

$$\Pi(D) = D \boxtimes \mathbf{P}^1 / D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1,$$

qui est une L-représentation de Banach admissible et topologiquement irréductible de G. La représentation $\Pi(D)$ est celle associée à D par la correspondance de Langlands p-adique. On a une suite exacte de G-modules topologiques

$$0 \to \Pi(D)^* \otimes \omega_D \to D \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(D) \to 0.$$

Le sous-module $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G et l'action de G s'étend par continuité pour définir un faisceau G-équivariant $U \mapsto D_{\mathrm{rig}} \boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. On a alors une suite exacte

$$0 \to (\Pi(D)^{\mathrm{an}})^* \otimes \omega_D \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(D)^{\mathrm{an}} \to 0,$$

où $\Pi(D)^{\mathrm{an}}$ dénote les vecteurs localement analytiques de la représentation $\Pi(D)$, ce qui rend naturel de pose $\Pi(D_{\mathrm{rig}}) = \Pi(D)^{\mathrm{an}}$.

Plus généralement, si $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ n'est pas triangulin, il est isocline et il existe un caractère δ tel que $D(\delta)$ soit étale. On définit alors $U \mapsto D \boxtimes U$ et $\Pi(D)$ par torsion à partir de $D(\delta) \boxtimes U$ et $\Pi(D(\delta))$; en particulier $\Pi(D) = \Pi(D(\delta)) \otimes (\delta^{-1} \circ \det)$. On obtient ainsi une L-représentation localement analytique $\Pi = \Pi(D)$ de caractère central ω_D et une suite exacte comme ci-dessus.

4.3.2 Le modèle de Kirillov, d'après Colmez

Soit $D \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ irréductible de rang 2 et soit $\Pi = \Pi(D)$ la représentation de G décrite dans la section précédente. Notons $B = (\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ le Borel supérieur et soit $\mathscr{Y}$ un $L_\infty[[t]]$-module muni d'une action de l'algèbre de distributions $\mathscr{D}(\Gamma) = \mathscr{R}^+(\Gamma)$. On définit

$$\mathrm{LA}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^\times, \mathscr{Y})^\Gamma$$

comme l'espace des fonctions $\phi : \mathbf{Q}_p^\times \to \mathscr{Y}$ localement analytiques à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ (i.e $\phi(p^{-n}\mathbf{Z}_p^\times) = 0$ pour tout $n \gg 0$), vérifiant $\sigma_a(\phi(x)) = \phi(ax)$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^\times$. On muni $\mathrm{LA}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{Y})^\Gamma$ d'une action de B par la formule [6]

$$((\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}) \cdot \phi)(x) = \omega_D(d)[\varepsilon^{bx/d}]\phi(ax/d).$$

Soit Y un B-module de caractère central ω_D. On dit que Y admet un modèle de

6. Si $r \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{N}$ est tel que $rp^n \in \mathbf{Z}_p$, on pose $[\varepsilon^r] = \varphi^{-n}((1+T)^{p^n r}) \in L_n[[t]]$.

Kirillov s'il existe un B-module $\mathscr{Y}$ comme ci-dessus et une injection B-équivariante de Y dans $\mathrm{LA}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^\times, \mathscr{Y})^\Gamma$. Si Y admet un modèle de Kirillov, on note Y_{c} l'image inverse dans Y du sous-espace des fonctions ϕ dans $\mathrm{LA}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^\times, \mathscr{Y})^\Gamma$ dont le support est compact dans $\mathbf{Q}_p^\times$ ($\phi(p^n\mathbf{Z}_p^\times) = 0$ pour tout $|n| \gg 0$).

Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2$ de G agit sur le module $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ (cf. [29]) et l'action de $u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}$ sur D et donnée par $u^+ z = tz$. Notons $\Pi^{u^+-\mathrm{fini}}$ l'ensemble des $v \in \Pi$ tués par une puissance de u^+, qui en est un sous B-module. Si $v \in \Pi^{u^+-\mathrm{fini}}$ et $\tilde{v} \in D \boxtimes \mathbf{P}^1$ en est un relèvement, la condition $v \in \Pi^{u^+-\mathrm{fini}}$ se traduit donc par l'existence de $N, k \geq 0$ tels que $(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1)^k \tilde{v} \in \Pi^* \otimes \omega_D$.

Notons $D_{\mathrm{dif}} = \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)$, $D_{\mathrm{dif}}^+ = \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}^+(D)$ et $D_{\mathrm{dif}}^- = D_{\mathrm{dif}}/D_{\mathrm{dif}}^+$ et rappelons que l'on dispose des applications de localisation $\varphi^{-n} : D^{]0,r_n]} \to D_{\mathrm{dif}}$. Une remarque importante est que l'image de $\Pi^* \otimes \omega_D$ par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ est incluse dans $D^{]0,r_{m(D)}]}$ (en effet, elle est incluse dans $D^{]0,r_a]}$ pour un certain a par des raisons topologiques (car image d'un Fréchet dans une limite inductive de Fréchets) et stable par ψ car Π l'est par $\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$). Ceci nous permet de poser, pour $n \geq m(D)$ et N, k comme ci-dessus,

$$\varphi^{-n}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} p^j a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\tilde{v})) = \frac{1}{\varphi^{N+j-n}(\sigma_a(T))^k}\varphi^{-n}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} p^j a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1)^k\tilde{v})) \in t^{-k}D_{\mathrm{dif},n}^+.$$

Si $x \in \mathbf{Q}_p^\times$, l'image de $\varphi^{-n}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} p^j & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\tilde{v}))$ dans D_{dif}^- ne dépend ni du choix de $\tilde{v}$ (car un autre relèvement de v dans $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ diffère de $\tilde{v}$ pour un élément dans $\Pi(D)^* \otimes \omega_\Delta$ et l'image par φ^{-1} de sa restriction à $\mathbf{Z}_p$ appartient à $\varphi^{-n}(D^{]0,r_n]}) \subseteq D_{\mathrm{dif}}^+$) ni du choix de n assez grand (car l'action de Γ est localement analytique). On a donc une application bien définie

$$x \mapsto \mathscr{K}_v(x) \in \mathrm{LA}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^\times, D_{\mathrm{dif}}^-)^\Gamma.$$

Proposition 4.3.1 ([24], prop. 2.10)**.** *L'application $\mathscr{K}_v$ ci-dessus définit un modèle de Kirillov pour Π^{u^+-fini}.*

4.3.3 Dualité et modèle de Kirillov

Le choix d'un isomorphisme $\wedge^2 D = (\mathscr{R}\frac{dT}{1+T}) \otimes \omega_D$ induit un isomorphisme $\wedge^2 D_{\mathrm{dif}} = (L_\infty((t))dt) \otimes \omega_D$ de $L_\infty((t))$-espaces vectoriels munis d'une action de Γ [7]. On note

$$[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}} : D_{\mathrm{dif}} \times D_{\mathrm{dif}} \to L$$

l'accouplement défini par la formule

$$[x, y]_{\mathrm{dif}} = \mathrm{rés}_L((\sigma_{-1}(x) \wedge y) \otimes e_{\omega_D}^\vee),$$

7. L'action de Γ sur dt est donnée par $\sigma_a(dt) = adt$.

où $\mathrm{rés}_L : L_\infty((t))dt \to L$ est défini comme la composée de l'application résidu $L_\infty((t)) \to L_\infty$ et la trace de Tate normalisée $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{[L_n:L]}\mathrm{Tr}_{L_n/L} : L_\infty \to L$. L'accouplement $[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}$ satisfait $[\sigma_a x, \sigma_a y]_{\mathrm{dif}} = \omega_D(a)[x,y]_{\mathrm{dif}}$ et on a donc aussi

$$[x,y]_{\mathrm{dif}} = \omega_D(-1)\mathrm{rés}_L((x \wedge \sigma_{-1}(y)) \otimes e^\vee_{\omega_D}).$$

Comme $[D^+_{\mathrm{dif}}, D^+_{\mathrm{dif}}]_{\mathrm{dif}} = 0$, l'accouplement $[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}$ induit un accouplement

$$[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}} : D^+_{\mathrm{dif}} \times D^-_{\mathrm{dif}} \to L.$$

Si $\phi \in \mathrm{LA_c}(\mathbf{Q}_p^\times, D^-_{\mathrm{dif}})^\Gamma$, $z \in \Pi^* \otimes \omega_D$ et $N \gg 0$, la formule

$$[z,\phi] = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \omega_D(p^{-i})[\varphi^{-N}\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} p^{i+N} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)z, \phi(p^i))]_{\mathrm{dif}} \qquad (4.1)$$

ne dépend pas de N (assez grand) et définit une forme linéaire continue (car la somme est finie, ϕ étant à support compact) sur $\Pi^* \otimes \omega_D$ et fournit donc un plongement $\iota : \mathrm{LA_c}(\mathbf{Q}_p^\times, D^-_{\mathrm{dif}})^\Gamma \to \Pi$ caractérisé par

$$[z, \iota(\phi)]_{\mathbf{P}^1} = [z,\phi]$$

pour tout $z \in \Pi^* \otimes \omega_D$.

Proposition 4.3.2. *(cf. [24], prop. 2.13) L'image de ι est incluse dans $\Pi^{u^+-\mathit{fini}}$ et la composition $\mathscr{K} \circ \iota : \mathrm{LA_c}(\mathbf{Q}_p^\times, D^-_{\mathrm{dif}})^\Gamma \to \mathrm{LA_{rc}}(\mathbf{Q}_p^\times, D^-_{\mathrm{dif}})^\Gamma$ est l'inclusion naturelle.*

Terminons en remarquant (cf. [24], rem. 2.14) que, si D est de Rham non-triangulin, alors

$$\Pi(D)^{u^+-\mathrm{fini}} = \mathrm{LA_c}(\mathbf{Q}_p^\times, D^-_{\mathrm{dif}})^\Gamma.$$

4.3.4 (φ,Γ)-modules de de Rham non triangulins de dimension 2

Soit M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module irréductible de rang 2 : M est un $L \otimes K_0$-module libre de rang 2 muni d'actions semi-linéaire de φ, d'un opérateur linéaire $N : M \to M$ vérifiant $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (agissant à travers le groupe fini $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{G}_K$), commutant avec φ et N et telle que l'action du groupe d'inertie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ soit absolument irréductible. Soit

$$\Delta = \Delta(M) = (\mathscr{R}_K \otimes_{K_0} M)^{\mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty)},$$

qui est un (φ,Γ)-module de rang 2 sur $\mathscr{R}$, de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et 0 (cf. section 3.2.3).

Notons

$$M_{\mathrm{dR}} = (K \otimes_{K_0} M)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}},$$

qui est un L-espace vectoriel de dimension 2. On a $\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif,n}}(\Delta) = L_n[[t]] \otimes M_{\mathrm{dR}}$ pour $n \geq m(\Delta)$. Si $k \geq 1$ et $\mathscr{L} \subseteq M_{\mathrm{dR}}$ est une droite, on pose

$$\Delta_{k,\mathscr{L}} = \{z \in \Delta[1/t] : \varphi^{-n}(z) \in L_n[[t]] \otimes \mathscr{L} + t^k L_n[[t]] \otimes M_{\mathrm{dR}} \text{ pour } n \gg 0\},$$

qui est un (φ, Γ)-module de rang 2 sur $\mathscr{R}$, de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et k.

4.3.5 Techniques de changement de poids

Nous aurons besoin de certain résultats de Colmez concernant les vecteurs localement algébriques des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associées aux représentations de de Rham par la correspondance de Langlands p-adique (cf. [24]). Dans [24] (cf., par exemple, thm. 0.6), on construit, pour $k \in \mathbf{Z}$, une représentation localement analytique irréductible $\Pi(\Delta, k)$ de G, à caractère central $x^k \omega_\Delta$ en tordant convenablement l'action de G sur le module $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$. Plus précisément, si $a, c \in \mathbf{Q}_p$ ne sont pas tous les deux nuls, on montre que l'opérateur $c\partial + a$ agissant sur $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ est bijective et on définit, pour n'importe quel entier $k \in \mathbf{Z}$, une action de G sur $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ par la formule [8]

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) *_k v = (c\partial + a)^k \cdot (\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot v).$$

En particulier, si $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dénote l'involution, on a

$$w *_k v = \partial^k \cdot (w \cdot v).$$

On note $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$ le G-module $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ muni de l'action $*_k$. Le sous-module $\Pi(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta$ de $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par l'action $*_k$ de G et on note $\Pi(\Delta, k)$ le quotient de $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$ par $\Pi(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta$, qui est une représentation de G de type analytique.

La représentation $\Pi(\Delta, k)$ vérifie les propriétés suivantes :

— $\Pi(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta$, vu comme sous module de $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$, est isomorphe à $\Pi(\Delta, -k)^* \otimes \omega_\Delta$, d'où une suite exacte de G-modules

$$0 \to \Pi(\Delta, -k)^* \otimes \omega_\Delta \to (\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k] \to \Pi(\Delta, k) \to 0.$$

— Il existe une représentation lisse $\mathrm{LL}_p(\Delta)$ de G qui ne dépend ni du poids ni de la filtration, de caractère central $x\omega_\Delta$, telle que

$$\Pi(\Delta, k)^{\mathrm{alg}} = (\mathrm{LL}_p(\Delta) \otimes \mathrm{Sym}^{k-1}) \otimes M_{\mathrm{dR}},$$

8. Dans [24], la formule donnée pour l'action de G est $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) *_k v = (-c\partial + a)^k \cdot (\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot v)$. Le changement de signe ci-dessous est justifié par les différents normalisations entre [24] et ce travail (qui reprend plutôt les normalisations de [21] !) pour la représentation Sym^{k-1}. Ce changement élimine certaines nuisances des signes.

où $\Pi(\Delta,k)^{\mathrm{alg}}$ dénote les vecteurs localement algébriques de la représentation $\Pi(\Delta,k)$, et Sym^{k-1} est la puissance symétrique de la représentation évidente de G.

— $\Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}}) = \Pi(\Delta,k)/((\mathrm{LL}_p(\Delta)\otimes \mathrm{Sym}^{k-1})\otimes \mathscr{L})$.

— $\Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}})^{\mathrm{alg}} = (\mathrm{LL}_p(\Delta)\otimes \mathrm{Sym}^{k-1})\otimes (M_{\mathrm{dR}}/\mathscr{L})$.

4.3.6 Modèles de Kirillov

Les représentations $\Pi(\Delta)$ et $\Pi(\Delta,k)$ sont isomorphes, à torsion par un caractère près, en tant que B-représentations et l'application $v\mapsto \mathscr{K}_v$ de la section précédente fournit donc un modèle de Kirillov pour $\Pi(\Delta,k)^{u^+-\mathrm{fini}}$ dans $\mathrm{LA}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^\times,\Delta_{\mathrm{dif}}^-)^\Gamma$ et où l'action de B est donnée par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right) *_k \phi\right)(x) = a^k\omega_\Delta(d)[\varepsilon^{bx/d}]\phi(ax/d).$$

Ceci induit aussi des modèles de Kirillov pour $\Pi(\Delta,k)^{\mathrm{alg}}$, ainsi que pour $\mathrm{LL}_p(\Delta)$ et $\Pi(D)^{\mathrm{alg}}$.

Soient $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2\subseteq M_{\mathrm{dR}}$ deux droites et soit $W_{\mathscr{L}_i} = \ker(\Pi(\Delta,k)\to \Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}_i}))$, qui est une représentation localement algébrique de G. On a $\Pi(\Delta,k)^{\mathrm{alg}} = W_{\mathscr{L}_1}\oplus W_{\mathscr{L}_2}$ et $W_{\mathscr{L}_i} = \mathrm{LL}_p(\Delta)\otimes \mathrm{Sym}^{k-1}\otimes \mathscr{L}_i$. Enfin, on a le diagramme commutatif suivant, où les flèches horizontales sont des injections et les verticales des isomorphismes de G-modules, qui met en scène tous les personnages introduits ci-dessus et qui sera très utile pour nos calculs futurs.

$$\begin{tikzcd} W_{\mathscr{L}_i} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \Pi(\Delta,k)^{\mathrm{alg}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \Pi(\Delta,k)^{u^+-\mathrm{fini}} \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^\times, L_{\mathrm{dif}}^{-k}\otimes \mathscr{L}_i)^\Gamma \arrow[r] & \mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^\times, L_{\mathrm{dif}}^{-k}\otimes M_{\mathrm{dR}})^\Gamma \arrow[r] & \mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^\times, \Delta_{\mathrm{dif}}^{-})^\Gamma, \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

où l'on a noté $L_{\mathrm{dif}}^{-k} = (t^{-k}L_\infty[t]/L_\infty[t])$.

Remarque 4.3.3. Si e_1,e_2 la base canonique de L^2 sur L, on a $\mathrm{Sym}^{k-1} = \oplus_{j=0}^{k-1} L\cdot e_1^je_2^{k-1-j}$ et l'action de G est donnée par

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\cdot e_1^je_2^{k-1-j} = (ae_1+ce_2)^j(be_1+de_2)^{k-1-j}.$$

En particulier, on a

$$w\cdot e_1^je_2^{k-1-j} = e_1^{k-1-j}e_2^j.$$

On a, pour chaque $i=1,2$, un isomorphisme B-équivariant (cf. [21] VI.2.5)

$$\iota_i : \mathrm{LC}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^\times, L_\infty)^\Gamma\otimes \mathrm{Sym}^{k-1}\otimes \det{}^{-k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^\times, L_{\mathrm{dif}}^{-k}\otimes \mathscr{L}_i)^\Gamma,$$

$$\phi\otimes e_1^je_2^{k-1-j}\mapsto [x\mapsto (k-1-j)!\phi(x)(xt)^{j-k}\otimes f_i],$$

où B agit sur $\mathrm{LC_c}(\mathbf{Q}_p^\times, L_\infty)^\Gamma$ via la formule

$$((\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}) \cdot \phi)(x) = (x\omega_\Delta)(d)\psi(bx/d)\phi(ax/d)$$

et sur le module de droite par l'action $*_k$ décrite ci-dessus. Cet isomorphisme devient un isomorphisme G-équivariant si l'on munit ces espaces d'une action de G via les bijections $\mathrm{LL}_p(\Delta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{LC_c}(\mathbf{Q}_p^\times, L_\infty)^\Gamma$ et $W_{\mathscr{L}_i} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LP_c}(\mathbf{Q}_p^\times, L_{\mathrm{dif}}^{-k} \otimes \mathscr{L}_i)^\Gamma$.

Lemme 4.3.4. *Soient $k, j \in \mathbf{Z}$. Alors*

1. *On a $w \cdot \partial = \partial^{-1} \cdot w$ sur $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$.*
2. *$[g *_{-k} x, y]_{\mathbf{P}^1} = \omega_\Delta(\det g)[x, g^{-1} *_k y]_{\mathbf{P}^1}$, pour $x, y \in \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$, $g \in G$.*

Démonstration. Cf [24], prop. 3.6 pour le premier point. Le deuxième point est une réécriture de la formule $[g *_{-k} x, g *_k y]_{\mathbf{P}^1} = [g \cdot x, g \cdot y]_{\mathbf{P}^1}$ de [24], prop. 3.13.iii à l'aide de l'identité $[g \cdot x, g \cdot y]_{\mathbf{P}^1} = \omega_\Delta(\det g)[x, y]_{\mathbf{P}^1}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} [g *_{-k} x, y]_{\mathbf{P}^1} &= [g *_{-k} x, g *_k (g^{-1} *_k y)]_{\mathbf{P}^1} \\ &= [g \cdot x, g \cdot (g^{-1} *_k y)]_{\mathbf{P}^1} \\ &= \omega_\Delta(\det g)[x, g^{-1} *_{-k} y]_{\mathbf{P}^1} \end{aligned}$$

□

4.4 Une équation fonctionnelle locale

4.4.1 Vecteurs propres de ψ

Lemme 4.4.1. *Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R})$ et $\alpha \in \mathscr{O}_L^\times$, l'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ induit un isomorphisme*

$$(\Pi(D)^* \otimes \omega_D)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \alpha^{-1}} \to D^{\psi = \alpha}.$$

Démonstration. Notons [9] $D_0 \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{E})$ le (φ, Γ)-module correspondant à D, i.e $(D_0)_{\mathrm{rig}} = D$. Si $z \in D_0^{\psi=\alpha}$, l'élément $(z)_{n \geq 0}$ appartient à $(D_0^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \alpha^{-1}}$ et, par [22], prop. II.5.6, l'application $x \mapsto \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(x)$ définit un isomorphisme

$$(D_0^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \alpha^{-1}} = (D_0^\natural)^{\psi=\alpha} \to D_0^{\psi=\alpha}.$$

Si D_0 est absolument irréductible, alors $D_0^\natural = D_0^\sharp$ et, par [15], prop. III.23 (voir ainsi la

9. La preuve du lemme pour le cas étale se trouve dans [15], rem. V.14. On donne quand même l'argument ci-dessous.

remarque III.8), l'application $x \mapsto (\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}((\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})x))_{n\geq 0}$ induit un isomorphisme

$$D_0^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to D_0^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p,$$

ce qui permet conclure que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ induit un isomorphisme

$$(\Pi(D_0)^* \otimes \omega_D)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\alpha} \to D_0^{\psi=\alpha}.$$

Par [21], prop. V.1.18, on a $D^{\psi=1} = \mathscr{R}^+(\Gamma) \otimes_\Lambda D_0^{\psi=1}$, ce qui implique la surjectivité de la restriction $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : (\Pi(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\alpha^{-1}} \to D^{\psi=\alpha}$. Comme elle est aussi injective (cf. par exemple [24], prop. 2.20), on en déduit qu'elle est un isomorphisme, ce qui finit la démonstration. □

Lemme 4.4.2. *Soit $\Delta \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ irréductible, de rang 2 et de Rham à poids de Hodge-Tate nuls. Alors*

Si $v_p(\omega_\Delta) \in 2 \cdot \mathbf{Z}$, si $\alpha \in \mathscr{O}_L^\times$ et $r \in \mathbf{Z}$, l'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ induit un isomorphisme

$$(\Pi(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\alpha^{-1}p^{-r}} \to \Delta^{\psi=\alpha p^r}.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que, si Δ est irréductible, l'opérateur ∂^r induit (cf. [24], prop. 3.16 et prop. 3.6) des bijections

$$(\Pi(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\alpha^{-1}} \to (\Pi(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\alpha^{-1}p^{-r}}$$

et des bijections

$$\Delta^{\psi=\alpha} \to \Delta^{\psi=\alpha p^r},$$

car ∂ est bijective sur Δ (cf. [24], rem. 1.4 ainsi que 3.2) et car on a la relation $\psi\circ\partial = p\cdot\partial\circ\psi$.

Soit δ tel que $\Delta \otimes \delta$ est étale. On sait alors que $\omega_{\Delta(\delta)} = \omega_\Delta \otimes \delta^2$ est unitaire et donc $v_p(\delta(p)) = -\frac{1}{2}v_p(\omega_\Delta(p)) \in \mathbf{Z}$. Alors $\Pi(\Delta) = \Pi(\Delta(\delta)) \otimes (\delta^{-1} \circ \det)$ et $\Pi(\Delta)^* = \Pi(\Delta(\delta))^* \otimes (\delta \circ \det)$, d'où on déduit que

$$(\Pi(\Delta)^*)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\alpha^{-1}} = (\Pi(\Delta(\delta))^*)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\alpha^{-1}\delta(p)^{-1}} \otimes (\delta \circ \det),$$

pour tout $\alpha \in L$. En posant $\alpha = \alpha' \cdot p^{-v_p(\delta(p))}$, $\alpha' \in \mathscr{O}_L$ (de sorte que $\alpha^{-1}\delta(p)^{-1} \in \mathscr{O}_L^\times$), dans l'égalité ci-dessus, on déduit du lemme précédent que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ induit un isomorphisme

$$(\Pi(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\alpha} \to \Delta^{\psi=\alpha},$$

pour tout $\alpha = \alpha' p^{-v_p(\delta(p))}$, $\alpha' \in \mathscr{O}_L^\times$. Enfin, comme $v_p(\delta(p)) \in \mathbf{Z}$ on conclut en appliquant $\partial^{v_p(\delta(p))+r}$ des deux côtés. □

Remarque 4.4.3. La condition du lemme est vrai dès que l'on sait qu'il existe $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R})$ tel que $\Delta = \mathbf{N}_{\text{rig}}(D)$, ce qui est toujours le cas que l'on considère dans ce texte.

4.4.2 Théorie d'Iwasawa tordue

Si $\alpha \in L^\times$ et $z \in \Delta^{\psi=\alpha}$, les valeurs

$$\lim_{m\to+\infty} \alpha^{-m}p^{-m}\mathrm{Tr}_{L_m/L}([\varphi^{-m}z]_0)$$

ne dépendent pas de m assez grand et, pour $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère localement constant et $j > 0$, on pose

$$\exp^*(\int_\Gamma \chi^{-j}\cdot\mu_z) = \lim_{m\to+\infty} \alpha^{-m}p^{-m}\mathrm{Tr}_{L_m/L}([\varphi^{-m}(z\otimes e_{-j})]_0) \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta(\chi^{-j})) = M_{\mathrm{dR}}\otimes\mathbf{e}_{-j}^{\mathrm{dR}}.$$

Observons que $\varphi^{-m}(z\otimes e_{-j}) = p^{mj}\varphi^{-m}z\otimes e_{-j}$ et que, si $\varphi^{-n}z = \sum_{l\geq 0} a_l t^l$, $a_l \in L_m \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta)$, alors

$$[\varphi^{-m}z\otimes e_{-j}]_0 = a_j \otimes t^j e_j = a_j \otimes \mathbf{e}_{-j}^{\mathrm{dR}} \in L_m \otimes M_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_{-j}^{\mathrm{dR}}.$$

Remarquons que si $\alpha = 1$ on obtient la formule de la proposition 3.2.12. De même, on pose

$$\exp^{-1}(\int_\Gamma \chi^j\cdot\mu_z) = (-1)^j(j-1)! \lim_{m\to+\infty} \alpha^{-m}p^{-m}\mathrm{Tr}_{L_m/L}([\varphi^{-m}(\partial^{-j}z\otimes t^{-j}e_j)]_0),$$

qui est un élément dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta(\chi^j)) = M_{\mathrm{dR}}\otimes\mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}}$, où, si $\varphi^{-m}(\partial^{-j}z) = \sum_{l\geq 0} b_l t^l$, $b_l \in L_m \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta)$, alors

$$[\varphi^{-m}(\partial^{-j}z\otimes t^{-j}e_j)]_0 = p^{mj}b_0 \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} \in L_m \otimes M_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}}.$$

Notons que, grâce à la loi de réciprocité 3.2.10, ceci est cohérent si $\alpha = 1$.

4.4.3 Dualité et modèle de Kirillov (encore)

Considérons dans la suite le modèle de Kirillov de $\Pi(\Delta)^{u^+-\text{fini}}$ à valeurs dans le module $\mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^\times, \Delta_{\mathrm{dif}}^+)^\Gamma$. Si $\alpha \in L^\times$ et si $z \in \Delta^{\psi=\alpha}$, l'image de z par l'inverse de l'isomorphisme du lemme 4.4.2 ci-dessus est un élément de $(\Pi(\Delta)^*\otimes\omega_\Delta)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=\alpha^{-1}}$ que l'on note $\tilde{z}$. On a donc a $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} p^{i+n} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\tilde{z}) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\alpha^{-(i+n)}\tilde{z}) = \alpha^{-(i+n)}z$ et, si $\phi \in \mathrm{LA}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^\times, \Delta_{\mathrm{dif}}^-)^\Gamma$, la formule (4.1) pour l'accouplement prend la forme très simple suivante :

$$[\tilde{z}, \phi] = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \omega_\Delta(p^{-i})\alpha^{-(i+n)}[\varphi^{-n}z, \phi(p^i))]_{\mathrm{dif}}, \quad (n \gg 0)$$

Plus généralement, si $j \in \mathbf{Z}$, on peut appliquer ∂^j à $\tilde{z}$ pour obtenir un élément dans $(\Pi(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\alpha^{-1}p^{-j}}$ et on a

$$[\partial^j \tilde{z}, \phi] = \sum_{i \in \mathbf{Z}} \omega_\Delta(p^{-i})\alpha^{-(i+n)}p^{-j(i+n)}[\varphi^{-n}\partial^j z, \phi(p^i))]_{\mathrm{dif}}.$$

Rappelons que l'on a fixé une base f_1, f_2 de M_{dR}. Les éléments $1 \otimes f_1, 1 \otimes f_2$ forment une base du $L_\infty((t))$-espace vectoriel $\Delta_{\mathrm{dif}} = L_\infty((t)) \otimes M_{\mathrm{dR}}$ et l'on identifie $(1 \otimes f_1) \wedge (1 \otimes f_2) = \Omega^{-1} dt \otimes e_{\omega_\Delta}$ sous l'isomorphisme $\wedge^2 D_{\mathrm{dif}} = (L_\infty((t))dt) \otimes \omega_D$.

4.4.4 Exponentielle duale et accouplement $[\ ,\ ]_{\mathbf{P}^1}$

Suivant Nakamura (cf. [49]), on définit, pour η un caractère d'ordre fini, $k \geq 1$, $i \in \{1, 2\}$ et $m \in \mathbf{Z}$, la fonction $f^i_{\eta,k,m} \in \mathrm{LA}_c(\mathbf{Q}_p, \Delta^-_{\mathrm{dif}})^\Gamma$ par la formule

$$f^i_{\eta,k,m}(p^n a) = \begin{cases} (-1)^{i+1}(k-1)!\sigma_a(G(\eta)^{-1}t^{-k}) \otimes f_i & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Notons que, pour $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, on a tout simplement

$$f^i_{\eta,k,m}(p^m a) = (-1)^{i+1}(k-1)!\eta(a)a^{-k}G(\eta)^{-1}t^{-k} \otimes f_i.$$

Proposition 4.4.4. *Soient $\alpha \in L^\times$, $z \in \Delta^{\psi=\alpha\omega_\Delta^{-1}(p)}$, $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère d'ordre fini, $k \geq 1$ un entier, $j \in \mathbf{Z}$ tel que $j > -k$, $i \in \{1, 2\}$ et $m \in \mathbf{Z}$. Notons $\check{z} = z \otimes e^\vee_{\omega_\Delta} \in \check{\Delta}^{\psi=\alpha}$. Alors*

$$\langle \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j-k} \cdot \mu_{\check{z}}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j-k,\omega^\vee_\Delta}, f_i\rangle_{\mathrm{dR}} = \frac{p-1}{p}\alpha^m p^{mj}\eta(-1)\frac{\omega_\Delta(-1)(-1)^k}{(j+k-1)!}[\partial^j \tilde{z}, f^{3-i}_{\eta,k,m}]_{\mathbf{P}^1}.$$

Démonstration. Traitons le cas $i = 1$, l'autre étant évidement analogue. On a, pour $n \gg 0$,

$$\begin{aligned} \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j-k} \cdot \mu_{\check{z}}) &= \exp^*(\int_\Gamma 1 \cdot (\mu_z \otimes e_\eta \otimes e_{-j-k} \otimes e^\vee_{\omega_\Delta})) \\ &= \alpha^{-n}p^{-n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}([\varphi^{-n}(z \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j-k,\omega^\vee_\Delta})]_0), \end{aligned}$$

Comme $\varphi^{-n}(\mathbf{e}_{\eta,-j-k,\omega^\vee_\Delta}) = \omega_\Delta(p)^n \mathbf{e}_{\eta,-j-k,\omega^\vee_\Delta}$, on a

$$[\varphi^{-n}(z \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j-k,\omega^\vee_\Delta})]_0 = \omega_\Delta(p)^n[\varphi^{-n}z \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j-k,\omega^\vee_\Delta}]_0.$$

Clarifions la notation utilisée. L'élément $\varphi^{-n}z \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j-k,\omega^\vee_\Delta}$ appartient à

$$L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta(\eta\chi^{-j-k}\omega_\Delta^{-1})) = L_n[[t]] \otimes M_{\mathrm{dR}} \otimes L \cdot \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,-j-k,\omega^\vee_\Delta}$$

et peut être exprimé sous la forme $x \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,-j-k,\omega_\Delta^\vee}$, pour $x = G(\eta)^{-1}t^{1-k-j}\Omega^{-1}\varphi^{-n}z \in L_n((t)) \otimes M_{\mathrm{dR}}$. Si on écrit $\varphi^{-n}z$ sous la forme $\sum_{l\geq 0} a_l t^l$, on a alors

$$[\varphi^{-n}z \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j-k,\omega_\Delta^\vee}]_0 = G(\eta)^{-1}\Omega^{-1}a_{j+k-1} \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,-j-k,\omega_\Delta^\vee}.$$

Notons que l'élément $\mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,-j-k,\omega_\Delta^\vee}$ est invariant par Γ et commute donc à $\mathrm{Tr}_{L_n/L}$. On en déduit

$$\mathrm{Tr}_{L_n/L}([\varphi^{-n}(z \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j-k,\omega_\Delta^\vee})]_0) = \omega_\Delta(p)^n \cdot \mathrm{Tr}_{L_n/L}(G(\eta)^{-1}\Omega^{-1}[t^{-j-k+1}\varphi^{-n}z]_0) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,-j-k,\omega_\Delta^\vee}$$

En utilisant la formule $[t^{-j-k+1}\varphi^{-n}z]_0 = [\varphi^{-n}z]_{j+k-1} = \frac{p^{-n(j+k-1)}}{(j+k-1)!}[\varphi^{-n}\partial^{j+k-1}z]_0$ on en déduit

$$\exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j-k} \cdot \mu_{\tilde{z}}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j-k,\omega_\Delta^\vee}$$
$$= \frac{\omega_\Delta(p)^n}{(j+k-1)!} \cdot \alpha^{-n}p^{-n(j+k)}\mathrm{Tr}_{L_n/L}(G(\eta)^{-1}\Omega^{-1}[\varphi^{-n}\partial^{j+k-1}z]_0).$$

Enfin, en projetant vers la droite engendrée par f_1 on obtient la formule

$$\langle \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_{\tilde{z}}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_\Delta^\vee}, f_1\rangle_{\mathrm{dR}}$$
$$= \frac{\omega_\Delta(p)^n}{(j+k-1)!} \cdot \alpha^{-n}p^{-n(j+k)}\mathrm{Tr}_{L_n/L}(G(\eta)^{-1}\Omega^{-1}\langle[\varphi^{-n}\partial^{j+k-1}z]_0, f_1\rangle_{\mathrm{dR}}).$$

Par ailleurs, $z \in D^{\psi=\alpha\omega_\Delta^{-1}(p)}$ [10] et, si $n \gg 0$, on a

$$[\partial^j\tilde{z}, f^2_{\eta,k,m}]_{\mathbf{P}^1} = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \omega_\Delta(p)^n\alpha^{-i-n}p^{-j(i+n)}[\varphi^{-n}\partial^j z, f^2_{\eta,k,m}(p^i))]_{\mathrm{dif}}.$$

Comme $f^2_{\eta,k,m}(p^i) = 0$ dès que $i \neq m$, cette expression coïncide avec

$$\omega_\Delta(p)^n\alpha^{-m-n}p^{-j(m+n)}(k-1)![\varphi^{-n}\partial^j z, G(\eta)^{-1}t^{-k} \otimes f_2]_{\mathrm{dif}}$$

et, par définition de l'accouplement $[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}$ (notons que l'on a une égalité $\sigma_{-1}(G(\eta)^{-1}t^{-k} \otimes f_2) = \eta(-1)(-1)^k(G(\eta)^{-1}t^{-k} \otimes f_2)$, ceci est égale à

$$\omega_\Delta(p)^n\alpha^{-m-n}p^{-j(m+n)}\omega_\Delta(-1)\eta(-1)(-1)^k(k-1)!\mathrm{r\acute{e}s}_L((\varphi^{-n}\partial^j z \wedge (G(\eta)^{-1}t^{-k} \otimes f_2)) \otimes e^\vee_{\omega_\Delta}).$$

Nous étendons l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}}$ par $L_\infty((t))$-linéarité en un accouplement [11] $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}}$:

10. et donc, rappelons-le, $\partial^j\tilde{z} \in (\Pi(\Delta)^*)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \alpha^{-1}\omega_\Delta(p)p^{-j}}$
11. Rappelons que $\Delta_{\mathrm{dif}} = L_\infty((t)) \otimes M_{\mathrm{dR}}$.

$\Delta_{\mathrm{dif}} \times \Delta_{\mathrm{dif}} \to L_\infty((t))$ de sorte qu'on a la formule

$$x \wedge (h \otimes f_i) = h\langle x, 1 \otimes f_{3-i}\rangle_{\mathrm{dR}}((1 \otimes f_{3-i}) \wedge (1 \otimes f_i)) = h\langle x, 1 \otimes f_{3-i}\rangle_{\mathrm{dR}}(-1)^{i+1}\Omega^{-1} dt \otimes e_{\omega_\Delta},$$

pour $x \in \Delta_{\mathrm{dif}}$, $h \in L_\infty((t))$ et $i = 1, 2$. Ceci donne

$$\begin{aligned} \mathrm{rés}_L((\varphi^{-n}\partial^j z \wedge (G(\eta)^{-1}t^{-k} \otimes f_2) \otimes \omega_\Delta^\vee) &= \mathrm{rés}_L(G(\eta)^{-1}\Omega^{-1}t^{-k+1}\langle \varphi^{-n}\partial^j z, 1 \otimes f_1\rangle_{\mathrm{dR}} t^{-1}dt) \\ &= T_{\mathbf{Q}_p}(G(\eta)^{-1}\Omega^{-1}\langle [\varphi^{-n}\partial^j z]_{k-1}, f_1\rangle_{\mathrm{dR}}). \end{aligned}$$

Enfin, la formule $[\varphi^{-n}z]_{k-1} = \frac{p^{-n(k-1)}}{(k-1)!}[\varphi^{-n}\partial^{k-1}z]_0$ et l'égalité $T_{\mathbf{Q}_p} = \frac{p}{p-1}p^{-n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}$ montrent que $[\partial^j \tilde{z}, f^2_{\eta,k,m}]_{\mathbf{P}^1}$ est donné par la formule

$$\begin{aligned} &\frac{p}{p-1}\omega_\Delta(p)^n \alpha^{-m-n} p^{-j(m+n)}\omega_\Delta(-1)\eta(-1)(-1)^k p^{-nk}\mathrm{Tr}_{L_n/L}(G(\eta)^{-1}\Omega^{-1}\langle[\varphi^{-n}\partial^{j+k-1}z]_0, f_1\rangle_{\mathrm{dR}}) \\ &= \frac{p}{p-1}\alpha^{-m}p^{-mj}\omega_\Delta(-1)\eta(-1)(-1)^k (j+k-1)!\langle \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j}\cdot \mu_{\tilde{z}}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_\Delta^\vee}, f_1\rangle_{\mathrm{dR}} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

4.4.5 Exponentielle et accouplement $[\ ,\ ]_{\mathbf{P}^1}$

On définit, pour η un caractère d'ordre fini, $i = 1, 2$ et $m \in \mathbf{Z}$, la fonction $g^i_{\eta,m} \in \mathrm{LA_c}(\mathbf{Q}_p, \Delta^-_{\mathrm{dif}})^\Gamma$ par la formule

$$g^i_{\eta,m}(p^n a) = \begin{cases} (-1)^{i+1}\sigma_a(G(\eta)^{-1}\Omega t^{-1}) \otimes f_i & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Pour $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, on a donc

$$g^i_{\eta,m}(p^m a) = (-1)^{i+1}\eta(a)\det_\Delta(a)\cdot (G(\eta)^{-1}\Omega)\cdot (at)^{-1} \otimes f_i.$$

Proposition 4.4.5. *Soient $\alpha \in L^\times$, $z \in \Delta^{\psi=\alpha}$, η un caractère d'ordre fini, $i \in \{1, 2\}$ et $j \geq 1$. Alors*

$$\langle \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,j}, f_i\rangle_{\mathrm{dR}} = \frac{p-1}{p}(-1)^j (j-1)!\eta(-1)\omega_\Delta(p)^m \alpha^m p^{-jm}[\partial^{-j}\tilde{z}, g^{3-i}_{\eta,m}]_{\mathbf{P}^1}.$$

Démonstration. On a, pour $n \gg 0$,

$$\begin{aligned} \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_z) &= \exp^{-1}(\int_\Gamma \chi^j \cdot (\mu_z \otimes e_\eta)) \\ &= (-1)^j (j-1)!\alpha^{-n}p^{-n}\mathrm{T}_{L_n/L}([\varphi^{-n}(\partial^{-j}z \otimes e_\eta \otimes t^{-j}e_j)]_0) \end{aligned}$$

et comme $\varphi^{-n}(e_\eta \otimes t^{-j}e_j) = p^{nj}e_\eta \otimes t^{-j}e_j$, on a

$$\mathrm{T}_{L_n/L}([\varphi^{-n}(\partial^{-j}z \otimes e_\eta \otimes t^{-j}e_j)]_0) = p^{nj}\mathrm{T}_{L_n/L}([\varphi^{-n}\partial^{-j}z \otimes e_\eta \otimes t^{-j}e_j]_0).$$

Comme précédemment, l'élément $\varphi^{-n}\partial^{-j}z\otimes e_\eta\otimes t^{-j}e_j$ appartient à $L_n[[t]]\otimes\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta(\eta\chi^j)) = L_n[[t]] \otimes M_{\mathrm{dR}} \otimes L \cdot \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}}$ et peux donc être exprimé sous la forme $x \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}}$, avec $x = G(\eta)^{-1}\varphi^{-n}\partial^{-j}z \in L_n[[t]] \otimes M_{\mathrm{dR}}$. On a alors

$$[\varphi^{-n}\partial^{-j}z \otimes e_\eta \otimes t^{-j}e_j]_0 = G(\eta)^{-1}[\varphi^{-n}\partial^{-j}z]_0 \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}}.$$

Notons finalement que l'élément $\mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}}$ est invariant par Γ et commute donc à la trace, ce qui donne

$$\mathrm{T}_{L_n/L}([\varphi^{-n}(\partial^{-j}z \otimes e_\eta \otimes t^{-j}e_j)]_0) = p^{nj}\mathrm{T}_{L_n/L}(G(\eta)^{-1}[\varphi^{-n}\partial^{-j}z]_0) \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR}},$$

et, en accouplant avec f_1, on en déduit la formule

$$\langle \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\mathrm{dR},\vee}, f_1\rangle_{\mathrm{dR}} = (-1)^j(j-1)!\alpha^{-n}p^{n(j-1)}\mathrm{T}_{L_n/L}(G(\eta)^{-1}\langle[\varphi^{-n}\partial^{-j}z]_0, f_1\rangle_{\mathrm{dR}}). \tag{4.3}$$

Par ailleurs, $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \tilde{z} = \alpha^{-1}\tilde{z}$ et agit donc sur $\partial^{-j}\tilde{z} \in \Pi(\Delta)$ par multiplication par $\alpha^{-1}p^j$. On a, pour $n \gg 0$, la formule pour

$$\begin{aligned}
&[\partial^{-j}\tilde{z}, g_{\eta,m}^2]_{\mathbf{P}^1} \\
&\quad = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \omega_\Delta(p^{-i})\alpha^{-i-n}p^{j(i+n)}[\varphi^{-n}\partial^{-j}z, g_{\eta,m}^2(p^i))]_{\mathrm{dif}} \\
&\quad = \omega_\Delta(p)^{-m}\alpha^{-m-n}p^{j(m+n)}[\varphi^{-n}\partial^{-j}z, G(\eta)^{-1}\Omega t^{-1} \otimes f_2)]_{\mathrm{dif}} \\
&\quad = \omega_\Delta(p)^{-m}\alpha^{-m-n}p^{j(m+n)}\omega_\Delta(-1)\mathrm{rés}_L((\varphi^{-n}\partial^{-j}z \wedge \sigma_{-1}(G(\eta)^{-1}\Omega t^{-1} \otimes f_2)) \otimes e_{\omega_\Delta}^\vee),
\end{aligned}$$

où la première égalité est la formule pour l'accouplement $[\ ,\ ]_{\mathbf{P}^1}$ en termes du modèle de Kirillov, la deuxième suit de ce que $g_{\eta,m}^2(p^i) = 0$ dès que $i \neq m$, et la troisième est juste la définition de l'accouplement $[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}$. Comme $\sigma_{-1}(G(\eta)^{-1}) = \eta(-1)G(\eta)^{-1}$, $\sigma_a(\Omega t^{-1}) = \det_\Delta(a)a^{-1}\Omega t^{-1} = \omega_\Delta\Omega t^{-1}$, on a

$$\mathrm{rés}_L((\varphi^{-n}\partial^{-j}z \wedge \sigma_{-1}(G(\eta)^{-1}\Omega t^{-1} \otimes f_2)) \otimes e_{\omega_\Delta}^\vee)$$

$$= \omega_\Delta(-1)\eta(-1)\mathrm{rés}_L((\varphi^{-n}\partial^{-j}z \wedge (G(\eta)^{-1}\Omega t^{-1} \otimes f_2)) \otimes e_{\omega_\Delta}^\vee).$$

Or, la formule

$$x \wedge (h \otimes f_i) = h\langle x, 1 \otimes f_{3-i}\rangle_{\mathrm{dR}}((1 \otimes f_{3-i}) \wedge (1 \otimes f_i)) = h\langle x, 1 \otimes f_{3-i}\rangle_{\mathrm{dR}}(-1)^{i+1}\Omega^{-1}dt \otimes e_{\omega_\Delta},$$

$x \in \Delta_{\mathrm{dif}}$, $h \in L_\infty((t))$ et $i = 1, 2$, et la définition de $\mathrm{rés}_L$ comme la composée du résidu avec la trace de Tate normalisée donnent

$$\mathrm{rés}_L((\varphi^{-n}\partial^{-j}z \wedge (G(\eta)^{-1}\Omega t^{-1} \otimes f_2)) \otimes e^\vee_{\omega_\Delta}) = \frac{p}{p-1}p^{-n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}(G(\eta)^{-1}\langle[\varphi^{-n}\partial^{-j}z]_0, f_1\rangle_{\mathrm{dR}}).$$

On conclut alors que

$$[\partial^{-j}\tilde{z}, g^2_{\eta,m}]_{\mathbf{P}^1} = \frac{p}{p-1}\omega_\Delta(p)^{-m}\alpha^{-m-n}p^{j(m+n)}\eta(-1)p^{-n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}(G(\eta)^{-1}\langle[\varphi^{n}\partial^{-j}z]_0, f_1\rangle_{\mathrm{dR}}).$$

Enfin, en comparant avec la formule (4.3) on conclut que

$$[\partial^{-j}\tilde{z}, g^2_{\eta,m}]_{\mathbf{P}^1} = \frac{p}{(p-1)}\frac{(-1)^j}{(j-1)!}\eta(-1)\omega_\Delta(p)^{-m}\alpha^{-m}p^{jm}\langle \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^j \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,j}, f_1\rangle_{\mathrm{dR}},$$

et on finit la preuve. □

4.4.6 Vecteurs localement algébriques

La représentation $\Pi(\Delta)$ ne possède pas de vecteurs localement algébriques et on va tordre l'action de G de sorte que l'on fasse en apparaître, ce qui nous permettra de regarder les fonctions $f^i_{\eta,k,m}$ et $g^i_{\eta,m}$ comme des éléments du modèle de Kirillov d'une certaine représentation localement algébrique.

Reprenons les notations de la section 4.3.5 et notons $\pi = \mathrm{LL}_p(\Delta)$ dans la suite. Rappelons qu'on a la relation $\omega_\pi = x\omega_\Delta$ entre les caractères centraux de $\Pi(\Delta)$ et π. Soit $k \geq 1$ et soit $i \in \{1, 2\}$. On peut regarder les fonctions $f^i_{\eta,k,m}$ et $g^i_{\eta,m}$ comme des éléments de $\mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^\times, L_\infty^{-k} \otimes M_{\mathrm{dR}})^\Gamma$ qui, d'après le diagramme (4.2), s'identifie aux vecteurs localement algébriques $\Pi(\Delta, k)^{\mathrm{alg}}$ de la représentation $\Pi(\Delta, k)$. Rappelons l'on dispose des isomorphisme de G-modules (cf. remarque 4.3.3)

$$\iota_i : \mathrm{LC}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^\times, L_\infty)^\Gamma \otimes \mathrm{Sym}^{k-1} \otimes \det{}^{-k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^\times, L_{\mathrm{dif}}^{-k} \otimes M_{\mathrm{dR}})^\Gamma,$$

$$\phi \otimes e_1^j e_2^{k-1-j} \mapsto [x \mapsto (k-1-j)!\phi(x)(xt)^{j-k} \otimes f_i], \quad 0 \leq j \leq k-1.$$

Alors

— On a [12] $f^i_{\eta,k,m}(p^n a) = 0$ si $n \neq m$ et

$$\begin{aligned} f^i_{\eta,k,m}(p^m a) &= (k-1)!G(\eta)^{-1}\eta(a)(at)^{-k} \otimes f_i \\ &= (k-1)!p^{mk}G(\eta)^{-1}\eta(p^m a)(p^m at)^{-k} \otimes f_i \end{aligned}$$

et donc

$$\iota_i^{-1}(f^i_{\eta,k,m}) = p^{mk}G(\eta)^{-1}\xi_{\eta,m} \otimes e_1^0 e_2^{k-1}.$$

12. Observons que η est vu comme un caractère sur $\mathbf{Q}_p^\times$ en posant $\eta(p) = 1$.

— On a $g^i_{\eta^{-1},m}(p^n a) = 0$ si $n \neq m$ et

$$\begin{aligned} g^i_{\eta^{-1},m}(p^m a) &= (G(\eta^{-1})^{-1}\Omega) \cdot \eta^{-1}(a)\det_\Delta(a) \cdot (at)^{-1} \otimes f_i \\ &= (\det_\Delta(p)p^{-1})^{-m} \cdot (G(\eta^{-1})^{-1}\Omega) \cdot \eta^{-1}(p^m a)\det_\Delta(p^m a) \cdot (p^m at)^{-1} \otimes f_i \\ &= \omega_\Delta(p)^{-m} \cdot (G(\eta^{-1})^{-1}\Omega) \cdot \eta^{-1}(p^m a)\omega_\pi(p^m a) \cdot (p^m at)^{-1} \otimes f_i, \end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé $\det_\Delta(a) = \omega_\pi(a)$. D'où

$$\iota_i^{-1}(g^i_{\eta^{-1},m}) = \omega_\Delta(p)^{-m} \cdot (G(\eta^{-1})^{-1}\Omega) \cdot \xi_{\eta^{-1}\omega_\pi,m} \otimes e_1^{k-1}e_2^0.$$

Lemme 4.4.6. *Soient $k \geq 1$ et $i \in \{1,2\}$. On a*

$$w *_k f^i_{\eta,k,m} = (-1)^k p^{mk}\eta(-1)\omega_\Delta(p)^{-c(\pi\otimes\eta^{-1})-m}\Omega^{-1}\frac{G(\eta^{-1})}{G(\eta)}\varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1})g^i_{\eta^{-1},-c(\pi\otimes\eta^{-1})-m}$$

Démonstration. Par la discussion précédente et la proposition 4.2.2, on a

$$\begin{aligned} w *_k f^i_{\eta,k,m} &= \iota\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (p^{mk}G(\eta)^{-1} \cdot (\xi_{\eta,m} \otimes e_1^0 e_2^{k-1}))\right) \\ &= (-1)^k p^{mk}\eta(-1)G(\eta)^{-1}\varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1})\iota(\xi_{\eta^{-1}\omega_\pi,-c(\pi\otimes\eta^{-1})-m} \otimes e_1^{k-1}e_2^0) \\ &= (-1)^k p^{mk}\eta(-1)\omega_\Delta(p)^{-c(\pi\otimes\eta^{-1})-m}\Omega^{-1}\frac{G(\eta^{-1})}{G(\eta)}\varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1})g^i_{\eta^{-1},-c(\pi\otimes\eta^{-1})-m}, \end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité on a utilisé le fait que $\det\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = -1$. Ceci permet de conclure. □

4.5 L'équation fonctionnelle : cas de poids de Hodge-Tate nuls

4.5.1 Côté Iwasawa

Si $\alpha \in L^\times$ et $z \in \Delta^{\psi=\alpha}$, on note $\omega_\Delta(z) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot \tilde{z}) \in \Delta^{\psi=\alpha\omega_\Delta^{-1}(p)}$. C'est aussi l'unique élément x tel que $(1-\alpha\omega_\Delta^{-1}(p)\varphi)x = \omega_D \cdot (1-\alpha\varphi)z$. On est maintenant en condition de montrer le résultat principal de cette section

Théorème 4.5.1. *Soient $\alpha \in L^\times$, $z \in \Delta^{\psi=\alpha}$ et notons $\check{z} = w_\Delta(z) \otimes e^\vee_{\omega_\Delta} \in \check{\Delta}^{\psi=\alpha}$. Soient $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère d'ordre fini, $i \in \{1,2\}$ et $m \in \mathbf{Z}$. Alors*

$$\exp^*\left(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_{\check{z}}\right) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_\Delta^\vee} = C(\Delta,\eta,j) \cdot \exp^{-1}\left(\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^j \cdot \mu_z\right) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta^{-1},j},$$

où

$$C(\Delta,\eta,j) = \eta(-1)\frac{(-1)^j}{(j-1)!^2} \cdot \Omega^{-1}\frac{G(\eta^{-1})}{G(\eta)}\varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1}\otimes|\cdot|^j) \cdot \alpha^{c(\pi\otimes\eta^{-1})},$$

pour tout $j \geq 1$.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat en projetant sur f_i, pour $i \in \{1,2\}$. Soient $j \geq 0$ et $k \geq 1$ et notons

$$A_i = \langle \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j-k} \cdot \mu_{\tilde{z}}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j-k,\omega_\Delta^\vee}, f_i\rangle_{\mathrm{dR}},$$

$$B_i = \langle \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^{j+k} \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta^{-1},j+k}, f_i\rangle_{\mathrm{dR}}.$$

En posant $m = 0$ dans la formule de la proposition 4.4.4 on obtient

$$A_i = \frac{p-1}{p}\eta(-1)\frac{\omega_\Delta(-1)(-1)^k}{(j+k-1)!}[\partial^j w \cdot \tilde{z}, f^{3-i}_{\eta,k,0}]_{\mathbf{P}^1}.$$

Or, on a

$$\partial^j w \cdot \tilde{z} = w \cdot \partial^{-j}\tilde{z} = w \cdot \partial^k\partial^{-j-k}\tilde{z} = w *_{-k} \partial^{-j-k}\tilde{z}$$

et, en utilisant la formule $[g *_{-k} x, y]_{\mathbf{P}^1} = \omega_\Delta(\det g)[x, g^{-1} *_k y]_{\mathbf{P}^1}$ du lemme 4.3.4, on en déduit

$$[\partial^j w \cdot \tilde{z}, f^{3-i}_{\eta,k,0}]_{\mathbf{P}^1} = \omega_\Delta(-1)[\partial^{-j-k}\tilde{z}, w *_k f^{3-i}_{\eta,k,0}]_{\mathbf{P}^1}.$$

Grâce au lemme 4.4.6, on sait que

$$[\partial^{-j-k}\tilde{z}, w *_k f^{3-i}_{\eta,k,0}]_{\mathbf{P}^1} = (-1)^k\eta(-1)\omega_\Delta(p)^{-c(\pi\otimes\eta^{-1})}\Omega^{-1}\frac{G(\eta^{-1})}{G(\eta)}\varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1})[\partial^{-j-k}\tilde{z}, g^i_{\eta^{-1},-c(\pi\otimes\eta^{-1})}]_{\mathbf{P}^1}.$$

Enfin, en appliquant le lemme 4.4.5 avec $j = j+k$, on a

$$[\partial^{-j-k}\tilde{z}, g^i_{\eta^{-1},-c(\pi\otimes\eta^{-1})}]_{\mathbf{P}^1} = \frac{p}{p-1}\frac{(-1)^{j+k}}{(j+k-1)!}\eta(-1)(\omega_\Delta(p)\alpha p^{-j-k})^{c(\pi\otimes\eta^{-1})}B_i.$$

Observons que $\varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1})p^{-c(\pi\otimes\eta^{-1})(j+k)} = \varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1}\otimes|\cdot|^{j+k})$. En simplifiant toutes ces jolies formules, on obtient

$$A_i = \eta(-1)\frac{(-1)^{j+k}}{(j+k-1)!^2}\Omega^{-1}\frac{G(\eta^{-1})}{G(\eta)}\varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1}\otimes|\cdot|^{j+k}) \cdot \alpha^{c(\pi\otimes\eta^{-1})}B_i.$$

Comme $j \geq 0$ et $k \geq q$ on été choisis arbitrairement, ceci achève la démonstration. □

Remarque 4.5.2.

— Le même genre de calculs ont été faits par Nakamura (cf. [49], proposition 3.15) dans la bande critique, ce qui lui permet de démontrer la conjecture ε locale de Kato (cf. [49] thm. 1.1) pour les représentations de de Rham de dimension 2 à poids de Hodge-Tate $k_1 \leq 0$ et $k_2 \geq 1$. Les calculs ci-dessus permettent, de la même manière, prouver cette conjecture pour toute représentation de de Rham de dimension 2, comme on le montre dans le chapitre suivant.

— Si $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ est le caractère trivial, la constante $C(\Delta, \eta, j)$ dévient

$$C(\Delta, \eta, j) = \frac{(-1)^j}{(j-1)!^2} \cdot \Omega^{-1} \varepsilon(\pi \otimes |\cdot|^j) \cdot \alpha^{c(\pi)}.$$

— La valeur Ω^{-1} apparaît aussi dans le terme de gauche comme facteur dans $\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_\Delta^\vee}$. L'équation fonctionnelle du théorème ne dépend donc pas du choix de la base f_1 et f_2 de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta)$.

4.5.2 Côté analytique

Le théorème 4.5.1 nous permet de montrer une équation fonctionnelle pour la fonction $\Lambda_{D,z}$.

Théorème 4.5.3. *Soient $z \in \Delta^{\psi=1}$, $\check{z} = w_\Delta(z) \otimes e_{\omega_\Delta^\vee} \in \check{\Delta}^{\psi=1}$ et notons $\check{z}(-1) = \check{z} \otimes e_{-1}$. Soit $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ un caractère de conducteur p^n, $n > m(\Delta)$, et soit $c \in \mathbf{Q}_p^\times$ tel que $\eta(1+x) = \psi(c_\eta x)$ dès que $v_p(x) > n/2$ (cf. prop. 4.2.1). Soient $\mathfrak{U}_\Delta$ l'ouvert fourni par le théorème 3.3.3 et κ tel que $\eta\kappa \in \mathfrak{U}_\Delta$. Alors*

$$\Lambda_{\check{\Delta}(-1),\check{z}(-1)}(\eta\kappa\chi^{-1}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{-1,\omega_\Delta^\vee} = -p^{-n}\Omega^{-1}\omega_\pi(c_\eta)^{-1}\Lambda_{\Delta,z}(\eta^{-1}\kappa^{-1}),$$

Démonstration. Le résultat est une paraphrase du théorème 4.5.1 en termes de la fonction $\Lambda_{\Delta,z}$. Par densité de Zariski des caractères ηx^j dans $\mathfrak{B}(\eta, N(\Delta))$, il suffit de montrer le résultat pour les caractères de la forme $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_\Delta$, $j \geq 1$.

Sous l'hypothèse sur le conducteur de η, on a $c(\pi \otimes \eta^{-1}) = 2n$ et, par la proposition 4.2.1,

$$\varepsilon(\pi \otimes \eta^{-1}) = \omega_\pi(c_\eta)^{-1}\varepsilon(\eta)^{-1} = \omega_\pi(c_\eta)^{-1}p^{-n}G(\eta)^2.$$

En utilisant la formule $\frac{G(\eta^{-1})}{G(\eta)} = \eta(-1)p^n G(\eta)^{-2}$ la constante $C(\Delta, \eta, j)$ du théorème 4.5.1 dévient

$$C(\Delta, \eta, j) = \frac{(-1)^j}{(j-1)!^2} \cdot \Omega^{-1}\omega_\pi(c_\eta)^{-1}p^{-2nj}.$$

Par ailleurs, on a, par les formules de la proposition 3.3.14 (noter que Δ et $\check{\Delta}$ sont tous les deux à poids de Hodge Tate positifs),

$$\begin{aligned}\exp^*\Big(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_{\check{z}}\Big) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j} &= \exp^*\Big(\int_\Gamma \eta\chi^{-j+1} \cdot \mu_{\check{z}(-1)}\Big) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j} \\ &= \frac{1}{(j-1)!}p^{-nj}\Lambda_{\check{\Delta}(-1),\check{z}(-1)}(\eta\chi^{j-1}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_1 \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\check{\Delta}) = M_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\omega_\Delta^\vee},\end{aligned}$$

$$\exp^{-1}\Big(\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^j \cdot \mu_z\Big) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta^{-1},j} = (j-1)!(-1)^{j-1}p^{n(j-1)}\Lambda_{\Delta,z}(\eta\chi^{-j}) \in M_{\mathrm{dR}}.$$

On en déduit

$$\Lambda_{\check{\Delta}(-1),\check{z}(-1)}(\eta\chi^{j-1}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{-1,\omega^\vee_{\check{\Delta}}} = C(\Delta,\eta,j)\cdot p^{n(2j-1)}(-1)^{j-1}(j-1)!^2\Lambda_{\Delta,z}(\eta^{-1}\chi^{-j}),$$

et donc

$$\Lambda_{\check{\Delta}(-1),\check{z}(-1)}(\eta\chi^{j-1}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{-1,\omega^\vee_{\check{\Delta}}} = -p^{-n}\Omega^{-1}\omega_\pi(c_\eta)^{-1}\Lambda_{\Delta,z}(\eta^{-1}\chi^{-j}),$$

et ceci conclut la preuve.

$\square$

4.6 L'équation fonctionnelle : cas de poids de Hodge-Tate $0, k$

Les équations fonctionnelles des théorèms 4.5.1 et 4.5.3 peuvent être tordues pour obtenir des équations fonctionnelles analogues quand le (φ,Γ)-module est de Rham à poids de Hodge-Tate $0, k \geq 1$.

Soient $k \geq 1$, $\mathscr{L} \subseteq M_{\mathrm{dR}}$ une droite et notons $D = \Delta_{k,\mathscr{L}}$. On a alors $\omega_D = \omega_\Delta x^k$ et l'involution w_D sur $D^{\psi=0}$ est donnée par (la restriction à $D^{\psi=0}$ de) l'action $w_\Delta *_{-k} = \partial^{-k} w_\Delta = w_\Delta \partial^k$. Notons

$$\check{\Delta}[k] = \Delta \otimes \omega_\Delta^{-1} x^{-k}.$$

Ce module contient tous les duaux de Tate des (φ,Γ)-modules de la forme $\Delta_{k,\mathscr{L}}$. Le module D est à poids de Hodge-Tate $0, k$ et les poids de Hodge-Tate de $\check{D}$ sont dont $1-k, 1$, d'où $\check{D}(k-1)$ est à poids $0, k$.

Soit $z \in D^{\psi=1} \subseteq \Delta^{\psi=1}$ et soit $y = (1-\varphi)z \in D^{\psi=0}$. Posons

$$\check{y} = w_\Delta(y) \otimes e^\vee_{\omega_\Delta} \in \check{\Delta}^{\psi=0}; \quad \check{z} = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w_\Delta(\tilde{z})) \otimes e^\vee_{\omega_\Delta} \in \check{\Delta}^{\psi=1},$$

$$\check{y}[k] = w_D(y) \otimes e^\vee_{\omega_D} \in \check{\Delta}[k]^{\psi=0}; \quad \check{z}[k] = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w_D(\tilde{z})) \otimes e^\vee_{\omega_D} \in \check{\Delta}[k]^{\psi=1},$$

On a bien [13]

$$\check{y} = (1-\varphi)\check{z}, \quad \check{y}[k] = (1-\varphi)\check{z}[k].$$

4.6.1 Côté Iwasawa

L'équation fonctionnelle du théorème 4.5.1 en poids de Hodge-Tate positifs prend la forme suivante :

Théorème 4.6.1. *On a*

$$\exp^*\Big(\int_\Gamma \eta\chi^{-j}\cdot\mu_{\check{z}[k]}\Big) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega^\vee_D} = C(D,\eta,j)\cdot \exp^{-1}\Big(\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^j\cdot\mu_z\Big) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta^{-1},j}$$

13. $(1-\varphi)\check{z} = (1-\varphi)(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w_\Delta(\tilde{z})) \otimes e^\vee_{\omega_\Delta}) = (1-\omega_\Delta(p)^{-1}\varphi)\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w_\Delta(\tilde{z})) \otimes e^\vee_{\omega_\Delta} = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^\times}\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w_\Delta(\tilde{z})) \otimes e^\vee_{\omega_\Delta} = w_\Delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^\times}(z)) \otimes e^\vee_{\omega_\Delta} = \check{y}$.

où

$$C(D,\eta,j) = -\eta(-1)\frac{\Gamma^*(-j+1)}{\Gamma^*(j+k)} \cdot \Omega^{-1}\frac{G(\eta^{-1})}{G(\eta)}\varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1}\otimes|\cdot|^j)$$

pour tout $j \geq 1$.

Démonstration. Rappelons que l'on a $\check{z}[k] = \partial^{-k}\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w_\Delta(\tilde{z}))\otimes e^\vee_{\omega_\Delta}\otimes e_{x^{-k}} = \partial^{-k}\check{z}\otimes e_{x^{-k}}$. On a alors, pour $n \gg 0$,

$$\begin{aligned}\exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j}\cdot\mu_{\check{z}[k]}) &= p^{-n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}([\varphi^{-n}(\partial^{-k}\check{z}\otimes e_\eta\otimes e_{-j}\otimes e_{x^{-k}})]_0)\\ &= p^{-n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}([t^{-k}\partial^{-k}\varphi^{-n}(\check{z}\otimes e_\eta\otimes e_{-j})]_0)\otimes t^k e_{x^{-k}}.\end{aligned}$$

Observons que le terme $[t^{-k}\partial^{-k}\varphi^{-n}(\check{z}\otimes e_\eta\otimes e_{-j})]_0$ appartient à $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta\otimes\omega_\Delta^\vee\otimes\eta\chi^{-j}) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)\otimes G(\eta)\Omega^{-1}t^{-j+1}\cdot\mathbf{e}_{\eta,-j,\omega_\Delta^\vee}$. Si $\varphi^{-n}\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w_\Delta(\tilde{z})) = \sum_n a_l t^l$, en utilisant l'égalité $t^{-k}\partial^{-k}(a_l t^l) = \frac{1}{(l+1)(l+2)\dots(l+k)}a_l t^l$ pour $l \geq 0$, on en déduit

$$\begin{aligned}[t^{-k}\partial^{-k}\varphi^{-n}(\check{z}\otimes e_\eta\otimes e_{-j})]_0 &= \omega_\Delta(p)^n G(\eta)^{-1}\Omega[t^{-k}\partial^{-k}\sum_l a_l t^l]_{j-1}\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,-j,\omega_\Delta^\vee}\\ &= \omega_\Delta(p)^n G(\eta)^{-1}\Omega\frac{1}{j(j+1)\cdots(j+k-1)}a_{j-1}\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{\eta,-j,\omega_\Delta^\vee}\\ &= \frac{1}{j(j+1)\cdots(j+k-1)}[\varphi^{-n}(\check{z}\otimes\eta\otimes e_{-j})]_0.\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_D^\vee}\otimes t^k e_{x^{-k}} = \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_\Delta^\vee}$, on en déduit

$$\exp^*(\int_\Gamma\eta\chi^{-j}\cdot\mu_{\check{z}[k]})\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_D^\vee} = \frac{1}{j(j+1)\cdots(j+k-1)}\exp^*(\int_\Gamma\eta\chi^{-j}\cdot\mu_{\check{z}})\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_\Delta^\vee},$$

Par le théorème 4.5.1 (appliqué avec η le caractère trivial), on a

$$\exp^*(\int_\Gamma\eta\chi^{-j}\cdot\mu_{\check{z}})\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_\Delta^\vee} = C(\Delta,\eta,j)\cdot\exp^{-1}(\int_\Gamma\eta^{-1}\chi^j\cdot\mu_z)\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta^{-1},j},$$

où

$$C(\Delta,\eta,j) = \eta(-1)\frac{(-1)^j}{(j-1)!^2}\cdot\Omega^{-1}\frac{G(\eta^{-1})}{G(\eta)}\varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1}\otimes|\cdot|^j),$$

d'où

$$\begin{aligned}&\exp^*(\int_\Gamma\eta\chi^{-j}\cdot\mu_{\check{z}[k]})\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j,\omega_D^\vee}\\ &= \eta(-1)\frac{(-1)^j}{(j+k-1)!(j-1)!}\cdot\Omega^{-1}\frac{G(\eta^{-1})}{G(\eta)}\varepsilon(\pi\otimes\eta^{-1}\otimes|\cdot|^j)\cdot\exp^{-1}(\int_\Gamma\eta^{-1}\chi^j\cdot\mu_z)\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta^{-1},j},\end{aligned}$$

ce qui montre le lemme. □

Remarque 4.6.2. Si $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L^\times$ est le caractère trivial, la constante $C(D,\eta,j)$ du théorème 4.6.1 dévient

$$C(D,\eta,j)=\frac{(-1)^j}{(j+k-1)!(j-1)!}\cdot\Omega^{-1}\varepsilon(\pi\otimes|\cdot|^j).$$

4.6.2 Côté analytique

Lemme 4.6.3. *Notons $\check{z}[k](k-1)=\check{z}[k]\otimes e_{k-1}$. Alors*

$$\Lambda_{\check{D}(k-1),\check{z}[k](k-1)}(\eta\chi^j)=p^{nk}\Lambda_{\check{\Delta}(-1),\check{z}(-1)}(\eta\chi^{j-k})\otimes\mathbf{e}_k^{\mathrm{dR}}\otimes t^k e_{x^{-k}}.$$

Démonstration. Ce résultat un peu tautologique suit directement de la définition de l'application Λ. On a

$$\begin{aligned}\Lambda_{\check{D}(k-1),\check{z}[k](k-1)}(\eta\chi^j) &= \sum\eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\left(\partial^j(1-\varphi)(\partial^{-k}\check{z}\otimes e_{x^{-k}}\otimes e_{k-1})\right)]_0\\ &= \sum\eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\left((\partial^j(1-p^{-k}\varphi)\partial^{-k}\check{z}(-1))\otimes t^{-k}e_k\otimes t^k e_{x^{-k}}\right)]_0\\ &= p^{nk}\sum\eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}\partial^{j-k}(1-\varphi)\check{z}(-1)]_0\otimes\mathbf{e}_k^{\mathrm{dR}}\otimes t^k e_{x^{-k}}\\ &= p^{nk}\Lambda_{\check{\Delta}(-1),\check{z}(-1)}(\eta\chi^{j-k})\otimes\mathbf{e}_k^{\mathrm{dR}}\otimes t^k e_{x^{-k}}.\end{aligned}$$

□

Théorème 4.6.4. *Soit $D\in\Phi\Gamma(\mathscr{R})$ de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et $k\geq 0$. Soient $z\in D^{\psi=1}$ et $\check{z}=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w_D(\tilde{z}))\otimes e_{\omega_D}^{\vee}\in\check{D}^{\psi=1}$. Soit $\eta:\mathbf{Z}_p^{\times}\to L^{\times}$ un caractère de conducteur p^n avec $n\geq m(\Delta)$ et soient $c_\eta, c_{\eta^{-1}}\in\mathbf{Q}_p^{\times}$ comme dans la proposition 4.2.1. Soient $\mathfrak{U}_\Delta\subseteq\mathfrak{X}$ l'ouvert fourni par le théorème 3.3.3 et κ tel que $\eta\kappa\in\mathfrak{U}_\Delta$. Alors*

$$\Lambda_{\check{D}(k-1),\check{z}(k-1)}(\eta\kappa)\otimes\mathbf{e}_{k-1,\omega_D^\vee}^{\mathrm{dR},\vee}=-p^{n(k-1)}\cdot\Omega^{-1}\omega_\pi(c_\eta)^{-1}\cdot\Lambda_{D,z}(\eta^{-1}\kappa^{-1}\chi^{k-1})$$

Démonstration. C'est une simple traduction du théorème 4.5.3 à l'aide du lemme 4.6.3 ci-dessus. □

Remarque 4.6.5. Soit $z\in D^{\psi=1}$ et notons $\check{z}=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w_D(\tilde{z}))\otimes e_{\omega_D}^{\vee}\in\check{D}^{\psi=1}$ et $y=(1-\varphi)z$, $\check{y}=w_D(y)\otimes e_{\omega_D}^{\vee}$. Rappelons que $w_D=m_{\omega_D^{-1}}\circ w_*$. La formule (cf. [22], cor. V.5.2)

$$w_*(\check{y}\otimes e_\delta)=(\delta(-1)m_{\delta^2}\circ w_*(\check{y}))\otimes e_\delta$$

appliquée à $\delta=\chi^{k-1}$ et la relation $\omega_{\check{D}(k-1)}=\chi^{2(k-1)}\omega_{\check{D}}$ donnent

$$\begin{aligned}w_{\check{D}(k-1)}(\check{y}\otimes e_{k-1}) &= m_{\omega_{\check{D}(k-1)}^{-1}}\circ w_*(\check{y}\otimes e_{k-1})\\ &= m_{\chi^{-2(k-1)}\omega_{\check{D}}^{-1}}\circ w_*(\check{y}\otimes e_{k-1})\\ &= ((-1)^{k-1}\cdot m_{\chi^{-2(k-1)}\omega_{\check{D}}^{-1}}\circ m_{\chi^{2(k-1)}}\circ w_*(\check{y}))\otimes e_{k-1}\end{aligned}$$

$$= \quad (-1)^{k-1} w_{\check{D}}(\check{y}) \otimes e_{k-1},$$

d'où

$$\check{\check{y}} = w_{\check{D}(k-1)}(\check{y} \otimes e_{k-1}) \otimes e^{\vee}_{\omega_{\check{D}(k-1)}} = (-1)^{k-1} w_{\check{D}}(\check{y}) \otimes e^{\vee}_{\omega_{\check{D}}},$$

et comme $\omega_{\check{D}} \cdot \omega_D = 1$ et $e^{\vee}_{\omega_D} \otimes e^{\vee}_{\omega_{\check{D}}} = 1$, on a

$$\begin{aligned} w_{\check{D}}(\check{y}) \otimes e^{\vee}_{\omega_{\check{D}}} &= m_{\omega_{\check{D}}^{-1}} \circ w_*(w_D(y) \otimes e^{\vee}_{\omega_D}) \otimes e^{\vee}_{\omega_{\check{D}}} \\ &= \omega_D(-1) m_{\omega_D^{-1}} \circ w_*(w_D(y)) \otimes e^{\vee}_{\omega_D} \otimes e^{\vee}_{\omega_{\check{D}}} \\ &= \omega_D(-1) w_D(w_D(y)) \otimes e^{\vee}_{\omega_D} \otimes e^{\vee}_{\omega_{\check{D}}} \\ &= \omega_D(-1) y, \end{aligned}$$

et on en déduit la formule [14]

$$\check{\check{z}} = (1-\varphi)^{-1}(\check{\check{y}}) = \omega_D(-1)(-1)^{k-1} z = \omega_\pi(-1) z.$$

En appliquant deux fois le théorème 4.6.4, on obtient donc

$$\begin{aligned} \Lambda_{D,z}(\eta^{-1}\chi^j) &= C(D,\eta)^{-1} \cdot \Lambda_{\check{D}(k-1),\check{z}(k-1)}(\eta\chi^{-j+k-1}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{k-1,\omega_D^{\vee}} \\ &= \omega_\pi(-1) C(D,\eta)^{-1} \cdot C(\check{D}(k-1),\eta^{-1})^{-1} \cdot \Lambda_{D,z}(\eta^{-1}\chi^j) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{k-1,\omega^{\vee}_{\check{D}(k-1)}} \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{k-1,\omega_D^{\vee}}, \end{aligned}$$

où on a noté [15]

$$C(D,\eta) = -p^{n(k-1)} \cdot \Omega_D^{-1} \omega_\pi(c_\eta)^{-1}$$

$$C(\check{D}(k-1),\eta^{-1}) = -p^{n(k-1)} \cdot \Omega^{-1}_{\check{D}(k-1)} \omega_{\pi(\check{D}(k-1))}(c_{\eta^{-1}})^{-1}.$$

Observons que, comme $|c_\eta| = p^n$ (comme on le voit sur la formule $\eta(1+x) = \psi(c_\eta x)$), $\omega_\pi(c_\eta) = c_\eta^{1-k}\omega_D(c_\eta)$, et $\omega_D(c_\eta) \in \mathscr{O}_L^{\times}$, alors $p^{n(k-1)}\omega_\pi(c_\eta)^{-1} = p^{n(k-1)} c_\eta^{k-1} \omega_D(c_\eta)^{-1} \in \mathscr{O}_L^{\times}$ et donc $C(D,\eta) \in \mathscr{O}_L^{\times}$, et de même $C(\check{D}(k-1),\eta^{-1}) \in \mathscr{O}_L^{\times}$. Or,

$$\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{k-1,\omega^{\vee}_{\check{D}(k-1)}} \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{k-1,\omega_D^{\vee}} = t^{k-1} e_{1-k} \otimes (\Omega_{\check{D}(k-1)} t^{k-1})^{-1} e_{\omega_{\check{D}(k-1)}} \otimes t^{k-1} e_{1-k} \otimes (\Omega_D t^{k-1})^{-1} e_{\omega_D}$$

et, comme $\omega_{\check{D}(k-1)} = \omega_D^{-1}\chi^{2(k-1)}$ et donc $e_{\omega_{\check{D}(k-1)}} = e^{\vee}_{\omega_D} \otimes e_{k-1}^{\otimes 2}$, on peut identifier

$$\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{k-1,\omega^{\vee}_{\check{D}(k-1)}} \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{k-1,\omega_D^{\vee}} = \Omega_{\check{D}(k-1)} \cdot \Omega_D.$$

En simplifiant l'équation fonctionnelle ci-dessus on obtient

$$1 = \omega_\pi(-1) p^{-2n(k-1)} \cdot \omega_\pi(c_\eta) \omega_{\pi(\check{D}(k-1))}(c_{\eta^{-1}}).$$

14. Voir les remarques faites juste avant le lemme 4.6.3 pour la première égalité.

15. Dans les formules ci-dessous, π est la représentation lisse associée à D et $\pi(\check{D}(k-1))$ celle associée à $\check{D}(k-1)$.

Enfin, on sait que $\pi(\check{D}(k-1)) = \check{\pi} \otimes |\det|^{k-1}$ et $\omega_{\pi(\check{D}(k-1))} = \omega_{\check{\pi}} \cdot |x|^{2(k-1)}$ et $\omega_{\check{\pi}} = \omega_{\pi}^{-1}$. De plus, $c_{\eta^{-1}} = -c_\eta$ (car $\eta^{-1}(1+x) = \eta(1-x) = \psi(-c_\eta x)$ pour tout x tel que $v_p(x) \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$, $1-x$ étant l'inverse de $1+x$ modulo p^n), et comme $|c_\eta| = p^n$, on a alors

$$1 = \omega_\pi(-1)\omega_\pi(c_\eta)\omega_{\check{\pi}}(c_{\eta^{-1}}) = \omega_\pi(-c_\eta)\omega_{\check{\pi}}(-c_\eta) = 1. \quad (!)$$

Chapitre 5

La conjecture ε locale de Kato en dimension 2

La conjecture ε locale de Kato (cf. [39], [34] [49]) prédit l'existence d'une trivialisation canonique du déterminant de la cohomologie des représentations galoisiennes à coefficients dans un anneau p-adiquement complet A, interpolant des trivialisations standard (qui font intervenir les facteurs epsilon de la représentaiton, d'où le nom de la conjecture) quand A est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Elle peut donc être vue comme une interpolation p-adique des facteurs locaux des représentations de de Rham. Ce court chapitre a pour objectif montrer comment les méthodes développées dans le chapitre précédent permettent de compléter les résultats de Nakamura pour démontrer cette conjecture pour le cas de dimension 2 pour une certaine classe d'anneaux A, en montrant que l'isomorphisme ε construit dans [49] interpole l'isomorphisme ε de de Rham pour tout (φ, Γ)-module de Rham.

5.1 Notations

Fixons les notations dont on aura besoin dans la suite, pour lesquelles on renvoie aux références déjà citées.

- Soit A une $\mathbf{Z}_p$-algèbre commutative satisfaisant l'une des deux conditions suivantes
  - A est un anneau semi-local noethérien complet pour la topologie définie pour son idéal de Jacobson.
  - $A = L$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

  Si A satisfait une des ces conditions, on dit que A est une $\mathbf{Z}_p$-algèbre de type (*). Pour un tel A, on note $\mathscr{R}_A$ l'anneau de Robba relatif sur A (cf. 3.2.6) et notons $\Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R}_A)$ la catégorie de (φ, Γ)-modules sur étales sur $\mathscr{R}_A$.
- Soit $\mathbf{D}_{\text{perf}}(A)$ la catégorie de complexes de A-modules parfaits (i.e quasi-isomorphes

à un complexe borné de A-modules projectifs de type fini). On note

$$\mathrm{Det}_A : \mathbf{D}_{\mathrm{perf}}(A) \to \mathfrak{Inv}_A$$

le foncteur déterminant vers la catégorie de A-modules inversibles (i.e localement libres de rang 1). si P est un A-module projectif, on a $\mathrm{Det}_A(P) = \wedge_A^{r_P} P$, où r_P : $\mathrm{Spec}\, A \to \mathbf{Z}$ dénote le rang de P. On note $\mathbf{1}_A = \mathrm{Det}_A(0) = A$ est l'objet unité (pour le produit induit par le produit tensoriel).

— Soit $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R}_A)$ de rang 2 et de Rham. On pose

$$\Delta_{A,1}(D) = \mathrm{Det}_A(\mathscr{C}^\bullet_{\varphi,\gamma}(D))$$

le déterminant de la φ, γ-cohomologie de D, où $\mathscr{C}^\bullet_{\varphi,\gamma}(D)$ dénote le complexe qui calcule la cohomologie de D. Soit $\mathscr{E}_A$ définit comme précédemment si $A = L$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathscr{E}_A = \varprojlim A/\mathrm{Jac}(A)^n[[T]][T^{-1}]$ autrement. Notons $D_0 \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{E}_A)$ le (φ, Γ)-module correspondant à D. On définit

$$\mathscr{L}_A(D) = \{x \in \det_{\mathscr{R}_A} D_0 \mid \varphi(x) = \det_D(p),\ \sigma_a(x) = \det_D(a) \cdot x, \quad a \in \mathbf{Z}_p^\times\} = A \cdot e_D,$$

et on pose

$$\Delta_{A,2}(D) = \mathscr{L}_A(D).$$

Enfin, on définit la droite fondamentale locale de D comme

$$\Delta_A(D) = \Delta_{A,1}(D) \otimes \Delta_{A,2}(D).$$

Cette droite est compatible au changement de base, multiplicative pour les suites exactes courtes et se comporte bien sous la dualité.

— Si $T \in \mathrm{Rep}_A \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on on peut définir des modules $\Delta_{A,?}(T) \in \mathfrak{Inv}_A$ (cf. [39], [49], [48]) et on a des isomorphismes canoniques $\Delta_{A,?}(T) \cong \Delta_{A,?}(\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(T))$, pour $? \in \{1, 2\}$.

5.2 L'isomorphisme $\varepsilon^{\mathrm{dR}}_{L,\zeta}$

Soient $A = L$ une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R}_L)$ de Rham et $\zeta = (\zeta_{p^n})_{n \in \mathbf{N}}$ un système de racines p^n-ièmes de l'unité tel que $\zeta_p \neq 1$, $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$. On a besoin de trois ingrédients pour définir l'isomorphisme $\varepsilon^{\mathrm{dR}}_{L,\zeta}$:

— La suite exacte fondamentale et les propriétés d'adjonction entre les applications exponentielle et exponentielle duale induisent la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \ \to\ & H^0_{\varphi,\gamma}(D) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(D) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(D) \oplus t_D \to H^1_{\varphi,\gamma}(D) \\ \to\ & \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\check{D})^* \oplus t^*_{\check{D}} \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\check{D})^* \to H^0_{\varphi,\gamma}(\check{D})^* \to 0 \end{aligned}$$

Par dualité, on sait que $H^0_{\varphi,\gamma}(\check{D})^* = H^2_{\varphi,\gamma}(D)$ et $(t_{\check{D}})^* = \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$. Le déterminant du complexe ci-dessus nous fournit donc d'un isomorphisme

$$\theta_L(D) : \mathbf{1}_L \xrightarrow{\sim} \Delta_{L,1}(D) \otimes \mathrm{Det}_L(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)).$$

— On note, pour $r \in \mathbf{Z}$, $n_r = \dim_L \mathrm{gr}^{-r}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ et on définit

$$\Gamma_L(D) = \prod_{r\in\mathbf{Z}} \Gamma^*(r)^{-n_r},$$

où on rappelle que $\Gamma^*(r) = \begin{cases} (r-1)! & \text{si } r > 0 \\ \frac{(-1)^r}{(-r)!} & \text{si } r \leq 0 \end{cases}$

— Soit $h_D = \sum_{r\in\mathbf{Z}} r \cdot \dim_L \mathrm{gr}^{-r}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$. On a un isomorphisme (où on voit les deux espaces dans $\mathrm{Det}_{L_\infty((t))}(D_{\mathrm{dif}})$)

$$\theta_{\mathrm{dR,L}}(D,\zeta) : \mathrm{Det}_L(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}_L(D), \quad x \mapsto \varepsilon(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(D),\zeta)\cdot t^{h_D}\cdot x,$$

où $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(D) = (\mathscr{R}_K[\ell_T] \otimes_{\mathscr{R}} \Delta)^{\Gamma_K}$ est le $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré associé à D (cf. 3.2.3) et $\varepsilon(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(D),\zeta)$ dénote le facteur local de la représentation de Weil-Deligne ([27]) [1].

Avec les applications définies ci-dessus, on définit

$$\varepsilon^{\mathrm{dR}}_{L,\zeta} : \mathbf{1}_L \xrightarrow{\Gamma_L(D)\cdot\theta_L(D)} \Delta_{L,1}(D) \otimes \mathrm{Det}(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)) \xrightarrow{1\otimes\theta_{\mathrm{dR,L}}(D,\zeta)} \Delta_L(D).$$

5.3 Énoncé de la conjecture

Rappelons la conjecture en question.

Conjecture 5.3.1. Il existe une unique famille d'isomorphismes

$$\varepsilon_{A,\zeta}(D) : \mathbf{1}_A \xrightarrow{\sim} \Delta_A(D),$$

pour tout triplet (A, D, ζ) tel que A est une $\mathbf{Z}_p$ algèbre de type (*), $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R}_A)$ est de Rham et $\zeta = (\zeta_{p^n})_{n\in\mathbf{N}}$ est un système compatible de racine p^n-ièmes de l'unité, satisfaisant les propriétés suivantes

1. Pour tout morphisme $A \to A'$ de $\mathbf{Z}_p$-algèbres, on a

$$\varepsilon_{A,\zeta}(D) \otimes 1_{A'} = \varepsilon_{A',\zeta}(D \otimes_A A').$$

1. Comme on l'a remarqué, on sait, grâce à la compatibilité locale-globale dans la correspondance de Langlands p-adique, que les facteurs locaux des représentations de Weil-Deligne coïncident avec les facteurs locaux des représentations lisses fournies par la théorie du modèle de Kirillov. On pourrait donc définir les isomorphismes ε de de Rham en utilisant ces derniers et, dans ce cas-là, la preuve de la conjecture presentée dans ce chapitre ne dépendrait pas de telle compatibilité.

2. Pour toute suite exacte $0 \to D' \to D \to D'' \to 0$ on a

$$\varepsilon_{A,\zeta}(D) = \varepsilon_{A,\zeta}(D') \otimes \varepsilon_{A,\zeta}(D'').$$

3. Pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, on a

$$\varepsilon_{A,\sigma_a(\zeta)}(D) = \det_D(a) \cdot \varepsilon_{A,\zeta}(D).$$

4. La composition

$$\mathbf{1}_A \xrightarrow{\varepsilon_{A,\zeta(D)}} \Delta_A(D) \xrightarrow{\sim} \Delta_A(\check{D})^* \xrightarrow{\varepsilon_{A,\zeta^{-1}}(\check{D})^*} \mathbf{1}_A$$

donne l'identité, où l'isomorphisme au milieu est celui induit par la dualité locale.

5. Pour tout triplet (L, D, ζ) tel que D est de Rham, on a

$$\varepsilon_{L,\zeta}(D) = \varepsilon^{\mathrm{dR}}_{L,\zeta}(D).$$

5.4 Construction de l'isomorphisme

Dans [49], Nakamura construit, pour tout triplet (A, D, ζ) comme ci-dessus, un candidat pour l'isomorphisme $\varepsilon_{A,\zeta} : \mathbf{1}_A \xrightarrow{\sim} \Delta_A(D)$ et il démontre le résultat suivant :

Théorème 5.4.1 ([49], thm. 3.1)**.** *Les isomorphismes $\varepsilon_{A,\zeta}(D)$, pour (A, D, ζ) tel que D est de rang ≤ 2, satisfont les propriétés $(1), (2)$ et (3) et (4) de la conjecture. De plus, si $(A, D, \zeta) = (L, D, \zeta)$ est tel que D est de Rham et triangulin ou non-triangulin et à poids de Hodge-Tate $k_1 \leq 0$ et $k_2 > 0$, alors $\varepsilon_{L,\zeta}(D) = \varepsilon^{\mathrm{dR}}_{L,\zeta}(D)$.*

Rappelons brièvement la construction de l'isomorphisme (cf. [49] pour les détails). Soit $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R}_A)$ absolument irréductible et notons $\mathbf{Dfm}(D) \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R}_A^+(\Gamma))$ sa déformation cyclotomique comme dans 3.2.8 et $\Delta^{\mathrm{Iw}}_{A,?}(D) = \Delta_{\mathscr{R}_A^+(\Gamma),?}(\mathbf{Dfm}(D))$, pour $? \in \{1, 2\}$. L'opérateur $1 - \varphi$ induit un isomorphisme de $\mathscr{R}_A(\Gamma)$-modules $D^{\psi=1} \otimes_{\mathscr{R}_A^+(\Gamma)} \mathscr{R}_A(\Gamma) \xrightarrow{\sim} D^{\psi=0}$ et donc un isomorphisme

$$\Delta^{\mathrm{Iw}}_{A,1}(D) \otimes_{\mathscr{R}_A^+(\Gamma)} \mathscr{R}_A(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Det}_{\mathscr{R}_A(\Gamma)}(D^{\psi=0})^{-1}.$$

Comme $\mathscr{L}_{\mathscr{R}_A^+(\Gamma)}(\mathbf{Dfm}(D)) = \mathscr{L}_A(D) \otimes_A \mathscr{R}_A^+(\Gamma)$, l'isomorphisme ci-dessus induit

$$\Delta^{\mathrm{Iw}}_A(D) \otimes_{\mathscr{R}^+(\Gamma)} \mathscr{R}_A(\Gamma) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Det}_{\mathscr{R}_A(\Gamma)}(D^{\psi=0}) \otimes_A \mathscr{L}_A(D))^{-1}.$$

Enfin, l'accouplement d'Iwasawa (cf. 3.4.8) nous permet de trivialiser ce dernier module en définissant un isomorphisme

$$\mathrm{Det}_{\mathscr{R}_A(\Gamma)}(D^{\psi=0}) \otimes_A \mathscr{L}_A(D)^\vee \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}_A(\Gamma)$$

par $(x \wedge y) \otimes z^\vee \mapsto [\sigma_{-1}]\langle w_D(x) \otimes z^\vee \otimes e_1, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$. Ceci induit donc

$$\eta_{A,\zeta}(D) : \mathbf{1}_{\mathscr{R}_A(\Gamma)} \xrightarrow{\sim} \Delta_A^{\mathrm{Iw}}(D) \otimes_{\mathscr{R}_A^+(\Gamma)} \mathscr{R}_A(\Gamma).$$

On montre (cf. [49] prop. 3.4) que l'isomorphisme $\eta_{A,\zeta}(D)$ descend en un isomorphisme

$$\varepsilon_{A,\zeta}^{\mathrm{Iw}}(D) : \mathbf{1}_{\mathscr{R}_A^+(\Gamma)} \xrightarrow{\sim} \Delta_A^{\mathrm{Iw}}(D),$$

et, pour $\delta : \mathbf{Z}_p^\times \to A^\times$ un caractère localement analytique, on définit

$$\varepsilon_{A,\zeta}(D(\delta)) = \varepsilon_{A,\zeta}^{\mathrm{Iw}}(D(\delta)) \otimes_{\mathscr{R}^+(\Gamma), f_\delta} 1_A : \mathbf{1}_A \xrightarrow{\sim} \Delta_A^{\mathrm{Iw}}(D) \otimes_{\mathscr{R}_A^+(\Gamma), f_\delta} A \xrightarrow{\sim} \Delta_A(D),$$

où on note $f_\delta : \mathscr{R}_A^+(\Gamma) \to A$ le morphisme induit par $[\gamma] \mapsto \delta(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$.

Si on déroule les définitions ci-dessus (cf. aussi [49], rem. 3.9), on voit que la trivialisation du module $\Delta_A^{\mathrm{Iw}}(D) = \mathrm{Det}(D^{\psi=1}) \otimes_A \mathscr{L}_A^\vee(D)$ induite par l'isomorphisme $\varepsilon_{A,\zeta}(D(\delta))$ est donnée par

$$(x \wedge y) \otimes z^\vee \mapsto \int_\Gamma \delta \cdot \mu_{[\sigma_{-1}]\langle w_D((1-\varphi)x \otimes z^\vee), (1-\varphi)y\rangle_{\mathrm{Iw}}}.$$

5.5 Interpolation

Le théorème 5.5.2 ci-dessous complète la démonstration de Nakamura de la conjecture ε locale de Kato pour les représentations galoisiennes de rang au plus 2

Reprenons les notations de 4.6 et soient $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R})$ de Rham non-triangulin à poids de Hodge-Tate 0 et $k \geq 0$, $\mathscr{L} \subseteq \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ sa filtration de Hodge et $\Delta = \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D) \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$ qui est de Rham à poids de Hodge-Tate nuls de sorte que $D = \Delta_{k,\mathscr{L}}$.

Pour $j \in \mathbf{Z}$, notons [2]

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dif}} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\check{D}(-j)) \times \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)(j) \to L$$

l'accouplement naturel induit par la restriction l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dif}}$ entre $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(\check{\Delta}(-j))$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(\Delta(j))$ défini par $\langle x \otimes e_{-j}, y \otimes e_j\rangle_{\mathrm{dif}} \mapsto p^{-n} T_{L_n/L}(\mathrm{rés}_0(\langle x, y\rangle))$ pour $n \gg 0$, $x \in \check{\Delta}, y \in \Delta$ (cf. [21] VI.3.4). D'après [21], lemme VI.4.16, l'application $x \mapsto t^{k-1} x \otimes e_{\omega_{D(k)}}^\vee$ induit un isomorphisme de Δ_{dif}^+ sur son $L_\infty[[t]] \cdot dt$-réseau dual dans $\check{D}_{\mathrm{dif}}$.

Rappelons que l'on a fixé une base $\{f_1, f_2\}$ de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, ce qui permet de fixer des bases $\{f_1 \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}}, f_2 \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}}\}$ des modules $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta(j)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta) \otimes L \cdot \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}}$. Ce choix induit

2. Par un petit abus de notation, on note par $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dif}}$ l'accouplement pour tous le différents tordus de D.

un produit scalaire

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta(j)) \times \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\Delta(j)) \to L$$

défini par la formule $x = \sum_{i=1,2} \langle x, f_i \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} \rangle \cdot (f_i \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}})$. Rappelons aussi que Ω est défini par la formule $f_1 \wedge f_2 = t^{-1}(\Omega^{-1} t^{-k+1} e_{\omega_D}) \cdot dt$. On aura besoin du lemme suivant

Lemme 5.5.1. *Sous les identifications faites ci-dessus, on a, pour $x \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\check{\Delta}(-j))$,*

$$\langle x, f_i \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} \rangle_{\mathrm{dif}} = (-1)^{i-1} \langle x \otimes \mathbf{e}_{-j,\omega_D^\vee}^{\mathrm{dR},\vee}, f_i \rangle_{\mathrm{dR}}.$$

Démonstration. Observons d'abord que $\langle x, f_i \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} \rangle_{\mathrm{dif}} = \langle x \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}}, f_i \rangle_{\mathrm{dif}}$. Notons [3] $y = x \otimes \mathbf{e}_j^{\mathrm{dR}} \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ et $y' = t^{1-k}(y \otimes e_{\omega_D})$ de sorte que $y = t^{k-1} y' \otimes e_{\omega_D}^\vee$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle y, f_i \rangle_{\mathrm{dif}} &= \langle t^{k-1} y' \otimes e_{\omega_D}^\vee, f_i \rangle_{\mathrm{dif}} \\ &= \mathrm{rés}_0(t^{k-1} \cdot (y' \wedge f_i) \otimes e_{\omega_D}^\vee) \end{aligned}$$

Or,

$$y' \wedge f_i = \langle y', f_{3-i} \rangle_{\mathrm{dR}} \cdot (f_{3-i} \wedge f_i) = (-1)^{i-1} \Omega^{-1} t^{-k} \cdot \langle y', f_{3-i} \rangle_{\mathrm{dR}} \cdot e_{\omega_D} \cdot dt.$$

On en déduit

$$\langle x, f_i \otimes \mathrm{e}_j^{\mathrm{dR}} \rangle_{\mathrm{dif}} = (-1)^{i-1} \Omega^{-1} t^{1-k} \cdot \langle x \otimes \mathbf{e}_{-j}^{\mathrm{dR},\vee} \otimes e_{\omega_D^\vee}^\vee, f_i \rangle_{\mathrm{dR}} = (-1)^{i-1} \cdot \langle x \otimes \mathbf{e}_{-j,\omega_D^\vee}^{\mathrm{dR},\vee}, f_i \rangle_{\mathrm{dR}},$$

ce qui permet de conclure. □

Théorème 5.5.2. *Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{ét}}(\mathscr{R})$ de Rham non-triangulin. Alors*

$$\varepsilon_{L,\zeta}(D) = \varepsilon_{L,\zeta}^{\mathrm{dR}}(D).$$

Démonstration. Soient $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{ét}}(\mathscr{R})$, de Rham non-triangulin à poids de Hodge-Tate 0 et $k \geq 0$. Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que les isomorphismes epsilon coïncident sur $D(j)$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$. La preuve du théorème consiste à expliciter les deux isomorphismes en question pour se ramener à montrer une version tordue de l'équation fonctionnelle du théorème 4.5.1.

La suite exacte définissant le morphisme $\theta_L(D)$ acquiert, dans le cas non-triangulin, la forme suivante

$$0 \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(\xi))/\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(j)) \xrightarrow{\exp} H^1_{\varphi,\gamma}(D(j)) \xrightarrow{\exp^*} \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(j)) \to 0.$$

De plus, on sait que $H^0_{\varphi,\gamma}(D(j)) = H^2_{\varphi,\gamma}(D(j) = 0$ et donc $\mathrm{Det}(\mathscr{C}^\bullet_{\varphi,\gamma}(D(j)) = \mathrm{Det}(H^1_{\varphi,\gamma}(D(j))$.
On a trois situations possibles :

1. Soit $\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(j)) = 0$ (le cas de poids de Hodge-Tate positifs).

3. On voit tous ces éléments dans $D_{\mathrm{dif}} = \Delta_{\mathrm{dif}}$ et $\check{D}_{\mathrm{dif}} = \Delta_{\mathrm{dif}} \otimes \omega_D^\vee$.

2. Soit $\dim_L \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(j)) = 1$ (le cas de poids de Hodge-Tate $k_1 \leq 0$ et $k_2 > 0$).
3. Soit $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(j)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(j))$ (le cas de poids de Hodge-Tate négatifs).

Comme on a remarqué, le deuxième cas a été traité par Nakamura, et les deux autres cas sont en dualité. On se place dans la suite dans le premier des cas, le troisième s'en déduisant par dualité (condition (4) de la conjecture).

Lemme 5.5.3. *Le morphisme* $\beta^{\mathrm{dR}}_{L,\zeta}(D(j)) : \mathrm{Det}(H^1_{\varphi,\gamma}(D(j))) \to \mathscr{L}_L(D(j))$ *déduit de* $\varepsilon^{\mathrm{dR}}_{L,\zeta}(D(j))$ *satisfait*

$$\beta^{\mathrm{dR}}_{L,\zeta}(D(j))\left((\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z) \wedge \exp(f_i \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j)\right) = (-1)^{i-1} \cdot C_1 \cdot e_{D(j)},$$

où

$$C_1 = \Gamma_L(D(j)) \cdot \Omega^{-1} \cdot \varepsilon(D_{\mathrm{pst}}(D(j))) \cdot \langle \exp^{-1}(\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_j, f_{3-i}\rangle.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
&\theta'_1(D(j))\left((\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z) \wedge \exp(f_i \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j)\right)\\
&= \exp^{-1}(\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z) \wedge (f_i \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j)\\
&= \langle \exp^{-1}(\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z), f_{3-i} \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j\rangle \cdot (f_{3-i} \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j \wedge f_i \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j).
\end{aligned}$$

Observons que $(f_{3-i} \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j \wedge f_i \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j) = (f_{3-i} \wedge f_i) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\otimes 2}_j = (-1)^{i-1}\Omega^{-1}t^{-k-2j}e_{D(j)}$, d'où la dernière expression est égale à

$$(-1)^{i-1}\Omega^{-1} \cdot t^{-k-2j} \cdot \langle \exp^{-1}(\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_j, f_{3-i}\rangle \cdot e_{D(j)}$$

On conclut à partir de la formule $\beta^{\mathrm{dR}}_{L,\zeta} = \theta_2 \circ \theta_1 = \Gamma_L \cdot \theta_2 \circ \theta'_1$ que l'élément

$$\beta^{\mathrm{dR}}_{L,\zeta}(D(j)\left((\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z) \wedge (f_i \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j)\right)$$

est donné par

$$(-1)^{i-1}\Gamma_L(D(j)) \cdot \Omega^{-1} \cdot \varepsilon(D_{\mathrm{pst}}(D(j))) \cdot \langle \exp^{-1}(\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_j, f_{3-i}\rangle \cdot e_{D(j)},$$

ce qui finit la preuve du lemme. □

Lemme 5.5.4. *Le morphisme* $\beta_{L,\zeta}(D(j)) : \mathrm{Det}(H^1_{\varphi,\gamma}(D(j))) \to \mathscr{L}_L(D(j))$ *déduit de* $\varepsilon_{L,\zeta}(D(j))$ *satisfait*

$$\beta_{L,\zeta}(D(j))\left((\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z) \wedge \exp(f_i \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j)\right) = (-1)^{i-1} \cdot C_2 \cdot e_{D(j)}.$$

où

$$C_2 = (-1)^j \langle \exp^*(\int_\Gamma \chi^{-j} \cdot \mu_{\check{z}}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{-j,\omega_D^\vee}, f_{3-i}\rangle_{\mathrm{dR}}.$$

Démonstration. Soit $z' \in D^{\psi=1}$ tel que $\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_{z'} = \exp(f_i \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j)$. On a, par définition de $\beta_{L,\zeta}(D(j))$,

$$\begin{aligned}
&\beta_{L,\zeta}(D(j))\Big((\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z) \wedge \exp(f_i \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j)\Big)\\
&= \int_\Gamma \chi^j \cdot \langle \sigma_{-1}((1-\varphi)\check{z}), (1-\varphi)z'\rangle_{\mathrm{Iw}} \cdot e_{D(j)}\\
&= \langle \exp^*(\int_\Gamma \chi^{-j} \cdot \mu_{\sigma_{-1}(\check{z})}), \exp^{-1}(\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_{z'})\rangle_{\mathrm{dif}} \cdot e_{D(j)}\\
&= (-1)^j \langle \exp^*(\int_\Gamma \chi^{-j} \cdot \mu_{\check{z}}), f_i \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_j\rangle_{\mathrm{dif}} \cdot e_{D(j)}
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité suit du lemme 3.4.1, et la dernière suit par définition de l'action de Λ sur la cohomologie d'Iwasawa. Par le lemme 5.5.1 ci-dessus, cette dernière expression coïncide avec

$$(-1)^{i-1}(-1)^j \langle \exp^*(\int_\Gamma \chi^{-j} \cdot \mu_{\check{z}}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{-j,\omega_D^\vee}, f_{3-i}\rangle_{\mathrm{dR}} \cdot e_{D(j)},$$

ce qui permet de conclure. □

Les poids de Hodge-Tate de la représentation $D(j)$ sont j et $k+j$ et on a

$$\Gamma(D(j)) = \Gamma^*(j)^{-1} \cdot \Gamma^*(k+j)^{-1} = \frac{1}{(j+k-1)!(j-1)!} = (-1)^{j-1}\frac{\Gamma^*(-j+1)}{\Gamma^*(j+k)}.$$

Enfin, la compatibilité locale-globale dans la correspondance de Langlands p-adique montre que

$$\varepsilon(D_{\mathrm{pst}}(D(j))) = p^{-c(\pi)j}\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\pi \otimes |\cdot|^j).$$

Le théorème est donc équivalent à l'identité

$$\exp^*(\int_\Gamma \chi^{-j} \cdot \mu_{\check{z}}) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{-j,\omega_D^\vee} = -\frac{\Gamma^*(-j+1)}{\Gamma^*(j+k)} \cdot \Omega^{-1} \cdot \varepsilon(\pi \otimes |\cdot|^j) \cdot \exp^{-1}(\int_\Gamma \chi^j \cdot \mu_z) \otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_j.$$

Le lemme 4.6.1 (voir aussi la remarque après sa démonstration) permet de finir la preuve du théorème et donc de la conjecture ε. □

Chapitre 6

Fonction L p-adique d'une forme modulaire

Pour terminer, on applique les résultats obtenus à la représentation associée à une forme modulaire et au système d'Euler de Kato. Soit

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n \in \mathrm{S}_k(\Gamma_1(N), \omega_f) \otimes \mathbf{C}$$

une forme primitive[1] de poids $k \geq 2$, niveau N et caractère $\omega_f : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$. Les opérateurs de Hecke T_n agissant sur f par $T_n f = a_n f$ et $T'_n f = \overline{a}_n f$. On note $F = \mathbf{Q}(a_1, a_2, \dots)$ le corps de nombres engendré par les coefficients de f et $\check{f} = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{a}_n q^n \in \mathrm{S}_k(\Gamma_1(N), \omega_f^{-1}) \otimes \mathbf{C}$ la forme conjuguée de f.

Soit v une place de F au-dessus de p et soit $L = F_v$. Notons $V(f) \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ la représentation galoisienne attachée à f (cf. 6.1 plus loin) et $D = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(f)) \in \Phi\Gamma^{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathscr{R})$.

On note

$$\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, s) = \frac{\Gamma(s)}{(2i\pi)^s} L(f, \eta^{-1}, s).$$

En appliquant une version p-adique de la conjecture de Bloch-Kato, on construit (cf. 6.4.1), pour tout $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L$ (que l'on voit comme un caractère de Dirichlet de conducteur une puissance de p) et tout $j \geq 0$, un plongement p-adique

$$\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j) \mapsto \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j)) \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$$

des valeurs spéciales aux entiers négatifs de la fonction L complexe (normalisée) de la forme modulaire. Rappelons que, dans la bande critique $1 \leq j \leq k-1$, les valeurs $\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j)$ sont naturellement interprétés (cf. 6.2.1 ci-dessous) p-adiquement en les multipliant par les périodes complexes de la forme f. Si $j \geq k$, l'équation fonctionnelle montrée dans le

1. i.e cuspidale, propre pour les opérateurs de Hecke, nouvelle et normalisée.

chapitre 4, accouplée avec une équation fonctionnelle satisfaite par le système d'Euler de Kato montrée par Nakamura (cf. 6.5.4), et l'équation fonctionnelle (!) de la fonction L complexe nous fournissent aussi une interprétation p-adique des valeurs $\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j)$ et on note donc, pour $j > 0$,

$$L(f, \eta, j) \mapsto \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j)) \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$$

les plongements ainsi construits. Le théorème final de ce texte est le suivant :

Théorème 6.0.1. *Il existe un ouvert $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{X}$, ne dépendant que de l'extension sur laquelle la représentation galoisienne associée à f dévient semi-stable, et contenant tous les caractères d'ordre fini assez ramifiés, et une fonction rigide analytique $\Lambda_f \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$ telle que, si $\eta \in \mathfrak{U}$ est un caractère de conducteur p^n et $j \in \mathbf{Z}$[2], alors*

$$\Lambda_f(\eta\chi^j) = p^{n(j+1)} G(\eta)^{-1} \cdot \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j+1))$$

Remarque 6.0.2. Si $N = N'p^r$, $(N', p) = 1$, $r \geq 0$, on devrait pouvoir trouver un lien entre le nombre r et le discriminant de l'extension K sur laquelle la L-représentation $V_L(f)$ dévient semi-stable, c'est-à-dire, entre r et le rayon de surconvergence de l'équation différentielle p-adique associée à $V(f)$. L'ouvert du théorème ne devrait donc dépendre que de r.

6.1 Notations et compléments

6.1.1 Courbes modulaires

Pour les détails sur la construction du système d'Euler de Kato, on renvoie le lecteur à [41]. Soient $N \geq 3$ et $Y(N)$ la courbe modulaire ouverte sur $\mathbf{Q}$ de niveau N. $Y(N)$ est l'espace de module dont les S-points, pour S un schéma, paramètrent les classes d'isomorphismes de triplets (E, e_1, e_2), où E est une courbe elliptique sur S et e_1, e_2 sont les S-points constituant une base des points de N-torsion de E. Il s'agit d'une courbe affine irréductible et lisse. Soit $X(N)$ sa compactification, que l'on obtient en ajoutant les pointes.

Soit, pour $M, N \geq 1$, $Y(M, N)$ la courbe modulaire sur $\mathbf{Q}$ de niveau dont les S-points, pour S un schéma, paramètrent les classes d'isomorphisme de triplets (E, e_1, e_2), où E est une courbe elliptique sur S et e_1, e_2 sont des S-points indépendants de E de M et N-torsion respectivement. Il s'agit d'une courbe affine irréductible et lisse. On a évidement $Y(N, N) = Y(N)$ et $Y(1, N) = Y_1(N)$ si $N \geq 3$. Si $M + N \geq 5$ et $M|L$, $N|L$, alors $Y(M, N) \cong G\backslash Y(L)$, où $G = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}) : a - 1 \equiv b \equiv 0 \bmod M$ et $c \equiv d - 1 \equiv 0 \bmod N\}$. Le morphisme canonique $Y(L) \to Y(M, N)$ et donné sur le problème de module par $(E, e_1, e_2) \mapsto (E, (L/M)e_1, (L/N)e_2)$. On note $X(M, N)$ la compactification de $Y(M, N)$ en ajoutant les pointes et $j : Y(M, N) \to X(M, N)$ l'inclusion naturelle.

2. On doit, comme précédemment, supposer que $j \geq 0$ ou $j \ll 0$ pour être précis.

6.1.2 Courbe elliptique universelle et représentations galoisiennes

Notons $\lambda : \mathscr{E}_{\Gamma(M,N)} \to Y(M,N)$ (resp. $\lambda : \mathscr{E}_{\Gamma(N)} \to Y(N)$, $\lambda : \mathscr{E}_{\Gamma_1(N)} \to Y_1(N)$) la courbe elliptique universelle sur $Y(M,N)$ (resp. $Y(N), Y_1(N)$). On définit un système local $\mathscr{H}^1$, localement isomorphe à $\mathbf{Z}^2$ sur $Y(M,N)$, par

$$\mathscr{H}^1 = \mathrm{R}^1\lambda_*(\mathbf{Z}).$$

Notons $\mathscr{H}^1_p = \mathscr{H}^1 \otimes \mathbf{Z}_p$. Si $T_p\mathscr{E}$ dénote le module de Tate de $\mathscr{E}$ vu sur $Y(M,N)$, on a alors, par dualité, $T_p\mathscr{E} \cong \mathscr{H}^1_p(1)$ et en particulier $\mathrm{Sym}^a\, T_p\mathscr{E} = \mathrm{Sym}^a(\mathscr{H}^1_p(1)) = (\mathrm{Sym}^a\mathscr{H}^1_p)(a)$. On pose, pour A un anneau quelconque,

$$V_{k,A}(Y(M,N)) = H^1(Y(M,N)(\mathbf{C}), \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbf{Z}}(\mathscr{H}^1) \otimes_{\mathbf{Z}} A),$$

$$V_{k,A}(X(M,N)) = H^1(Y(M,N)(\mathbf{C}), j_*\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbf{Z}}(\mathscr{H}^1) \otimes_{\mathbf{Z}} A),$$

ou les H^i dénotent les groupes de cohomologie singulière. Les théorèmes de comparaison nous fournissent un isomorphisme

$$V_{k,\mathbf{Z}_p}(Y(M,N)) \cong H^1_{\text{ét}}(Y(M,N)_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbf{Z}_p}(\mathscr{H}^1_p)),$$

d'où une action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ sur $V_{k,\mathbf{Z}_p}(Y(M,N))$, qui est non-ramifiée en toute place ne divisant pas pMN. On a aussi une action de la conjugaison complexe ι et, pour un élément $\gamma \in V_{k,A}(Y(M,N))$, on note $\gamma^+ = 1/2(\gamma + \iota(\gamma))$ (resp. $\gamma^- = 1/2(\gamma - \iota(\gamma))$) sa composante où la conjugaison agit comme l'identité (resp. moins l'identité)

Rappelons que $F = \mathbf{Q}(a_n : n \geq 1)$ est le corps engendré par les coefficients de la forme f. Les opérateurs de Hecke agissent sur $V_{k,F}(Y(N))$ de la manière usuelle et on définit

$$V_F(f) = V_{k,F}(Y_1(N))/\langle T_n - a_n\rangle,$$

qui est un F-espace vectoriel de dimension 2 (c'est le plus grand quotient de $V_{k,F}(Y_1(N))$ où les opérateurs de Hecke agissent par multiplication par a_n). Pour A une F-algèbre, on pose $V_A(f) = V_F(f) \otimes_F A$. Si $A = \mathbf{C}$, on a une action de la conjugaison complexe sur $V_{\mathbf{C}}(f)$ et si $\pm \in \{\pm 1\}$ on note $V_{\mathbf{C}}(f)^{\pm}$ le sous-espace où la conjugaison complexe agit par multiplication par $\pm$. Si v est une place de F au dessus de p, on a

$$V(f) = V_{F_v}(f) = V_F(f) \otimes_F F_v$$

qui est un F_v-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une action de Galois. C'est la représentation galoisienne attachée à f par Deligne. Finalement, on note

$$T(f) = V_{\mathscr{O}_{F_v}}(f) \subseteq V_{F_v}(f)$$

le $\mathscr{O}_{F_v}$-module engendré par l'image de $V_{\mathbf{Z}_p}(Y_1(N))$ dans $V_{F_v}(f)$, qui est un $\mathscr{O}_{F_v}$-module libre de rang 2 muni d'une action $\mathscr{O}_{F_v}$-linéaire de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$. On définit aussi

$$S(f) = S_k(\Gamma_1(N))/\langle T_n - a_n\rangle$$

l'espace (de dimension 1 sur F) des co-invariants de l'algèbre de Hecke associée à f. On observe que $V(f)^*(1) \cong V(\check{f})(k)$.

6.1.3 Symboles modulaire

Rappelons brièvement la théorie des symboles modulaires (cf. [41] 2.7, 4.7, 5.5 et 6.3). La dualité de Poincaré induit un isomorphisme

$$H^1(Y(M,N)(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \cong H_1(X(M,N)(\mathbf{C}), \{\text{cusps}\}, \mathbf{Z}),$$

et on définit $\delta_{M,N} \in H^1(Y(M,N)(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ comme l'image de la classe de homologie définie par la géodésique $\varphi : (0,\infty) \to X(N)(\mathbf{C})$, $\varphi(y) = iy$ qui joint les pointes 0 et ∞. On définit

$$\delta_{M,N}(k,r) \in H^1(Y(M,N)(\mathbf{C}), \mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbf{Z}}(\mathscr{H}^1)) \quad (1 \le r \le k-1),$$

en tirant en arrière le faisceau des puissances symétriques de l'homologie des courbes elliptiques le long du chemin φ (cf. [41] 2.7, cela revient à choisir une section $e_1^{r-1}e_2^{k-r-1}$ de $\Gamma((0,\infty), \varphi^{-1}(\mathrm{Sym}^{k-2}_{\mathbf{Z}}(\mathscr{H}_1)))$ où $\mathscr{H}_1 = \mathrm{Hom}(\mathscr{H}^1, \mathbf{Z})$ est le système local dont les germes en un point s'identifient au premier groupe d'homologie de la courbe elliptique associée et e_1, e_2 forment une base du faisceau $\varphi^{-1}(\mathscr{H}_1)$ libre de rang 2 sur $(0,\infty)$ dont les germes au point $y \in (0,\infty)$ s'identifient à yi et 1 respectivement). Finalement, pour $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ on définit $\delta_N(k,r,\xi) \in V_{k,\mathbf{Q}}(Y_1(N))$ comme la trace de $\xi^*(\delta_{L,L}(k,r))$ pour n'importe quel L tel que $N \mid L$ et $\delta(\check{f}, r, \xi) \in V(\check{f})$ en projetant sur la partie correspondante à $\check{f}$. Par un théorème de Ash-Stevens, les éléments $\xi^*\delta(k,r)$ (resp. $\delta(\check{f}, r, \xi)$), pour $1 \le r \le k-1$ et $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, engendrent $V_{k,\mathbf{Z}}(Y(L))$ (resp. $V(\check{f})$).

6.1.4 Variété de Kuga-Sato

Notons $\mathscr{E}_{X(N)} \to X(N)$ la courbe elliptique universelle au-dessus de $X(N)$ et $\mathscr{E}^{(k-2)}_{X(N)}$ le produit au-dessus de $X(N)$ de $(k-2)$ copies de $\mathscr{E}_{X(N)}$. Soit $\mathcal{KS}^{(k-2)}_{\Gamma(N)}$ la désingularisation canonique de $\mathscr{E}^{(k-2)}_{X(N)}$ construite par Deligne. La variété $\mathscr{E}^{(k-2)}_{\Gamma(N)}$ est un ouvert dans $\mathcal{KS}^{(k-2)}_{\Gamma(N)}$ et son complémentaire, qui coïncide avec l'image inverse des pointes de $X(N)$, est un diviseur à croisements normaux dans $\mathcal{KS}^{(k-2)}_{\Gamma(N)}$.

Le groupe [3] $G = (\mathfrak{S}_{k-2} \rtimes \mu_2^{k-2}) \rtimes (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ agit (cf. [41], 11) sur $\mathscr{E}^{(k-2)}_{\Gamma(N)}$ et sur $\mathcal{KS}^{(k-2)}_{\Gamma(N)}$ ($\mathfrak{S}_{k-2}$ agit en permutant les facteurs, μ_2^{k-2} par multiplication sur chaque coordonnée et

3. $\mathfrak{S}_{k-2}$ dénote le groupe symétrique de degré $k-2$ et $\mu_2 = \{\pm\}$ le groupe à deux éléments.

$(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ par translation via la structure de niveau sur $\mathscr{E}_{\Gamma(N)}$). Soit $\varepsilon : G \to \mu_2$ l'homomorphisme qui agit comme la signature sur $\mathcal{S}_{k-2}$, le produit sur μ_2^{k-2} et trivialement sur $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$. Notons, pour M un G-module quelconque, par $M(\varepsilon)$ l'ensemble des éléments sur lesquels G agit à travers ε.

On dispose (cf. [57]) des identifications suivantes de $\mathbf{Q}[\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})]$-modules

$$V_{k,\mathbf{Q}}(X(N)) \cong H^{k-1}(\mathcal{KS}^{(k-2)}_{\Gamma(N)}(\mathbf{C}), \mathbf{Q})(\varepsilon)$$

$$V_{k,\mathbf{Q}}(Y(N)) \cong H^{k-1}(\mathscr{E}^{(k-2)}_{\Gamma(N)}(\mathbf{C}), \mathbf{Q})(\varepsilon)$$

et de $\mathbf{Q}_p$-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$

$$V_{k,\mathbf{Q}_p}(X(N)) \cong H^{k-1}_{\text{ét}}(\mathcal{KS}^{(k-2)}_{\Gamma(N),\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p)(\varepsilon)$$

$$V_{k,\mathbf{Q}_p}(Y(N)) \cong H^{k-1}_{\text{ét}}(\mathscr{E}^{(k-2)}_{\Gamma(N),\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p)(\varepsilon)$$

$$\mathrm{Fil}^i H^{k-1}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{KS}^{(k-2)}_{\Gamma(N)})(\varepsilon) = \begin{cases} H^{k-1}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{KS}^{(k-2)}_{\Gamma(N)})(\varepsilon) & \text{si } i \leq 0 \\ S_k(X(N)) & \text{si } 1 \leq i \leq k-1 \\ 0 & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

Par ce qui précède, en appliquant les morphismes de comparaison entre la cohomologie de Betti et la cohomologie de de Rham, on obtient un morphisme de périodes

$$\mathrm{per} : S_k(X(N)) \otimes \mathbf{C} \to V_k(Y(N)) \otimes \mathbf{C}$$

qui commute aux opérateurs de Hecke. C'est le morphisme de périodes de la théorie d'Eichler-Shimura. En spécialisant en f on a aussi

$$\mathrm{per}_f : S(f) \otimes \mathbf{C} \to V_{\mathbf{C}}(f).$$

Finalement, si $\eta : (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$ est un caractère de Dirichlet, $1 \leq r \leq k-1$ et $\pm = (-1)^{k-r-1}\eta(-1)$, on définit $\mathrm{per}_{f,\eta} : S(f) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\zeta_{p^n}) \to V_{\mathbf{C}}(f)^\pm$ par la formule

$$\mathrm{per}_{f,\eta}(x \otimes y) = \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a(y)\mathrm{per}_f(x)^\pm,$$

où $\mathrm{per}_f(x)^\pm = 1/2(1 \pm \iota)\mathrm{per}_f(x)$ est la projection sur $V_{\mathbf{C}}(f)^\pm$.

On a de même les versions p-adiques de ce qui précède : $H^i_{\text{ét}}(\mathcal{KS}^{(k-2)}_{N,\overline{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_p)$ est une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et on a un isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(H^i_{\text{ét}}(\mathcal{KS}^{(k-2)}_{N,\overline{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_p)) \cong H^i_{\mathrm{dR}}(\mathcal{KS}^{(k-2)}_N) \otimes \mathbf{Q}_p$$

respectant les filtrations. On a donc

$$\mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbf{Q}_p}(X(N))) = \begin{cases} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_{k,\mathbf{Q}_p}(X(N))) & \text{si } i \leq 0 \\ S_k(X(N)) \otimes \mathbf{Q}_p & \text{si } 1 \leq i \leq k-1 \\ 0 & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

6.2 Le système d'Euler de Kato

Le théorème suivant résume la construction de Kato du système d'Euler associé à une forme modulaire.

Théorème 6.2.1 (Kato)**.** *Soient $f \in S_k(\Gamma_1(N), \omega_f) \otimes \mathbf{C}$ comme ci-dessus, $r, j, c, d, m \in \mathbf{Z}$ tels que $m \geq 1$, $1 \leq r \leq k-1$ et $c, d \equiv 1$ modulo N, $(c, 6p) = (d, 6p) = 1$, $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et S un ensemble fini de nombres premiers contenant $\mathrm{pr}(mN)$. Il existe alors des éléments*

$${}_{c,d}\mathbf{z}_m^{(p)}(\check{f}, j, r, \xi, S) \in H^1(\mathbf{Q}(\zeta_m), V_{\mathscr{O}_F}(\check{f})(k-j))$$

satisfaisant les propriétés suivantes

1. *Soient $m' \geq 1$, $m|m'$ et S' un ensemble fini de nombres premiers contenant $S \cup \mathrm{pr}(m')$ tel que $\mathrm{pr}(cd) \cap S' = \emptyset$. Alors l'application norme*

$$H^1(\mathbf{Q}(\zeta_{m'}), V(\check{f})(k-j)) \to H^1(\mathbf{Q}(\zeta_m), V(\check{f})(k-j))$$

envoie ${}_{c,d}\mathbf{z}_{m'}^{(p)}(\check{f}, j, r, \xi, S')$ vers

$$\Big(\prod_{l \in S'-S} (1 - a_l \sigma_l^{-1} l^{-j} + \varepsilon(l) \sigma_l^{-2} l^{k-1-2j})\Big) \cdot {}_{c,d}\mathbf{z}_m^{(p)}(\check{f}, j, r, \xi, S).$$

2. *Soit $\gamma = \delta(\check{f}, r, \xi)$ et notons, pour $\pm \in \{\pm 1\}$, $\gamma^\pm \in V_{\mathbf{C}}(\check{f})^\pm$ sa projection. L'élément*

$$(c^2 - c^{k-r+1}\sigma_c)^{-1}(d^2 - d^{r+1}\sigma_d)^{-1}\Big(\prod_{l|N}(1 - a_l l^{-k} \sigma_l^{-1})^{-1}\Big)({}_{c,d}\mathbf{z}_{p^n}^{(p)}(\check{f}, k, r, \xi, \mathrm{pr}(pN)))_{n \geq 1}$$

ne dépend pas du choix de c et d et définit un élément

$$\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k-j) \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}, V(\check{f})(k-j)) = \varprojlim_n H^1(\mathbf{Q}(\zeta_{p^n}), T(\check{f})(k-j)) \otimes F_v.$$

De plus, si l'on note $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f}) = \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(0) \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}, V(\check{f}))$, alors, pour tout $1 \leq j \leq k-1$ et $n \geq 0$, l'élément

$$\exp^*\Big(\int_{\Gamma_n} \chi^{k-j} \cdot \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})\Big) \in \mathrm{Fil}^{k-j}(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_{F_v}(\check{f}) \mid_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}})) = S(\check{f}) \otimes_F F_v \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\zeta_{p^n})$$

appartient en fait à $S(\check{f}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\zeta_{p^n})$ *et, pour tout caractère* $\eta : (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$ *et* $\pm = (-1)^{k-j-1}\eta(-1)$, *l'application* $\mathrm{per}_{\check{f},\eta}$ *envoie son image vers*

$$(2\pi i)^{k-j-1} \cdot L_{\{p\}}(f, \eta, j) \cdot \gamma^{\pm}.$$

Enfin, $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})$ *satisfait l'équation*

$$\mathbf{z}_{\iota(\gamma)}^{(p)}(\check{f}) = -\sigma_{-1}(\mathbf{z}_\gamma^{(p)})(\check{f}),$$

où ι *dénote l'action de la conjugaison complexe sur* $V(\check{f})$.

Remarque 6.2.2.

— Par le lemme 3.3.8, on sait que l'image par l'application $\mathrm{per}_{\check{f},\eta}$ de $\exp^*(\int_{\Gamma_n} \chi^{k-j} \cdot \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f}))$ n'est autre chose que

$$G(\eta)^{-1} \cdot \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{k-j} \cdot \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})) \otimes \mathbf{e}_\eta^{\mathrm{dR},\vee},$$

et la propriété du point (2) du théorème se traduit par le fait que

$$G(\eta)^{-1} \cdot \exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j+1} \cdot \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k-1)) \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j+1}^{\mathrm{dR},\vee} = (2\pi i)^{-j} L_{\{p\}}(f, \eta, j) \cdot (\check{f} \otimes \mathbf{e}_{k-1}^{\mathrm{dR}}),$$

où $\check{f}$ est vu comme un générateur de $\mathrm{Fil}^1 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(\check{f}))$ et donc $\check{f} \otimes \mathbf{e}_{k-1}^{\mathrm{dR}}$ est un générateur de $\mathrm{Fil}^1 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(\check{f})(k-1))$.

— La construction des éléments ${}_{c,d}\mathbf{z}_m^{(p)}(\check{f}, j, r, \xi, S)$ est faite dans [41], 8.11, et le premier point est la proposition 8.12 de [41]. Le deuxième point est [41], thm. 12.5, dont la démonstration se trouve dans [41], 13.9. Notons que dans [41], ce qu'ici on note r y est noté r' et j y est noté r. L'élément ${}_{c,d}\mathbf{z}_m^{(p)}(\check{f}, j, r, \xi, S)$ correspond donc à ${}_{c,d}\mathbf{z}_m^{(p)}(\check{f}, r, r', \xi, S)$ dans la notation de [41].

— Le premier point montre que $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})$ définit un système d'Euler, tandis que le deuxième fait le lien avec les valeurs spéciales de la fonction L complexe, permettant de montrer que ce système d'Euler est non-nul et de retrouver, à travers la machine de Perrin-Riou (cf. [41], 16), la fonction L p-adique de la forme modulaire f en question.

— Les éléments $\delta(\check{f}, r, \xi)$ engendrent tout l'espace $V(\check{f})$ (théorème 13.6 de [41]), et, en prenant de combinaisons linéaires, on définit une (unique) application

$$V(\check{f}) \to H^1_{\mathrm{Iw}}(V(\check{f})) \ ; \ \gamma \mapsto \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f}),$$

satisfaisant les propriétés de (2).

— La construction des éléments zêta (cf. [41] 8.1 - 8.11) est assez universelle. On construit, à partir des unités dans la courbe modulaire (unités de Beilinson), des éléments dans les groupes de K-théorie de ces courbes et on les fait descendre à la cohomologie galoisienne à coefficients dans $V_{\mathbf{Z}_p}(Y_1(N))$ par des morphismes de "classes de Chern". Tout ceci est indépendant de la forme f et, finalement, on projette sur la composante correspondante. Cette indépendance en f rend les systèmes d'Euler compatibles si l'on varie la forme, dans un sens qui sera précisé plus tard et qui nous permettra de passer d'une forme f à ses twists par des caractères de Dirichlet.

— Le lien entre le système d'Euler et les valeurs spéciales de la fonction L (cf. [41] thm. 9.5, 9.6 et 9.7) est fait via une loi de réciprocité de Kato (cf. [41], chap. 10.), en comparant deux applications exponentielles duales et en montrant que l'image par l'exponentielle duale de la version p-adique du système d'Euler coïncide avec le système d'Euler sur l'espace des formes modulaires, ce dernier étant relié aux valeurs spéciales de la fonction zêta de la courbe modulaire (ou de la fonction L complexe de la forme modulaire). Ces calculs sont restreints au cas où $1 \leq j \leq k-1$. Les résultats de Gealy que l'on verra plus loin permettent de compléter cette image en faisant le lien entre les éléments $\mathbf{z}^{(p)}_{\mathrm{Kato}}(\check{f}, -j, r, \xi, S)$, pour $j > 0$, et les valeurs spéciales de la fonction L complexe en relevant ces éléments à la cohomologie motivique et en utilisant des résultats du style conjecture de Bloch-Kato.

6.3 Conjecture de Bloch-Kato pour les formes modulaires, d'après M. Gealy

Soit
$$f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N), \omega_f) \otimes \mathbf{C}$$
une forme primitive de niveau $\Gamma_0(N)$, $N \geq 5$, poids $k \geq 2$ et caractère ω_f. Nous décrivons dans ce qui suit un résultat de M. Gealy concernant la conjecture de Bloch-Kato pour le motif associé à f. Ceci nous permettra, en utilisant les régulateurs p-adiques, de donner un sens p-adiques aux valeurs spéciales, en dehors de la bande critique, de la fonction L complexe de la forme f. On aura besoin d'un certain nombre de rappels.

6.3.1 Motifs et cohomologie motivique

Soit K un corps de nombre dont on note $\mathscr{O}_K$ l'anneau des entiers et soient X une variété propre et lisse de dimension d sur K, S un ensemble de nombres premiers de sorte que X ait bonne réduction aux places v de K en dehors des éléments de S.

Soit $j > 0$. On s'attend à l'existence du motif $M(-j) = h^d(X)(-j)$ et de son dual $M^*(1+j) = h^d(X)(d+1+j)$. En tout cas, on a des groupes de cohomologie motivique bien définis

$$H^1(M^*(1+j)) = H^{d+1}_{\mathscr{M}}(X, d+1+j) = \mathbb{H}^{d+1}_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbf{Q}(d+1+j)),$$

où $\mathbf{Q}(d+1+j)$ est le complexe de faisceaux motivique sur X défini par Voevodsky et $\mathbb{H}^p_{\mathrm{Zar}}(X, -)$ dénote l'hypercohomologie pour la topologie de Zariski de ce complexe. Le groupe $H^1(M^*(1+j))$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel conjecturalement de dimension finie. On pourrait aussi donner une définition en termes de K-théorie en posant $H^{d+1}_{\mathscr{M}}(X, d+1+j) = K_{d+1+2j}(X)^{(d+1+j)}_{\mathbf{Q}}$ le j-ième espace propre des opérateurs d'Adams agissant sur le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $K_{d+1+2j}(X)_{\mathbf{Q}}$ ou bien en termes de groupes de Chow supérieures.

6.3.2 Cohomologie de Deligne

Pour $q \geq 0$ un entier, considérons le complexe

$$\mathbf{R}(q)_{\mathcal{D}} = (2\pi i)^q \mathbf{R} \to \mathcal{O}_{X_{\mathbf{C},\mathrm{an}}} \to \Omega^1 \to \ldots \to \Omega^{q-1}$$

supporté en dégrées $[0, q]$, où $X_{\mathbf{C},\mathrm{an}}$ dénote l'analytification de $X_{\mathbf{C}} = X \times \operatorname{Spec} \mathbf{C}$. On définit la cohomologie de Deligne comme la hypercohomologie du complexe ci-haut :

$$H^p_{\mathscr{D}}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{R}(q)) = \mathbb{H}^p(X_{\mathbf{C},\mathrm{an}}, \mathbf{R}(q)_{\mathcal{D}}),$$

et, si X est définie sur $\mathbf{R}$,

$$H^p_{\mathscr{D}}(X, \mathbf{R}(q)) = \mathbb{H}^p_{\mathscr{D}}(X_{\mathbf{C},\mathrm{an}}, \mathbf{R}(q))^+,$$

où $^+$ dénote les éléments fixes par l'action diagonale de la conjugaison complexe agissant sur $X_{\mathbf{C},\mathrm{an}}$ et sur $\mathbf{R}(q)_{\mathscr{D}}$. On pose

$$H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j)) = H^{d+1}_{\mathscr{D}}(X, \mathbf{R}(d+1+j)).$$

Soient [4], pour $p, q \geq 0$ des entiers,

$$H^p_{\mathrm{B}}(X, \mathbf{R}(q)) = H^p_{\mathrm{sing}}(X_{\mathbf{C},\mathrm{an}}, (2\pi i)^q \mathbf{R}),$$

$$H^p_{\mathrm{dR}}(X) = H^p_{\mathrm{Zar}}(X_{\mathbf{C},\mathrm{an}}, \Omega^\bullet)$$

les groupes de cohomologie de Betti et les groupes de cohomologie de de Rham munis de leur filtration usuelle. On définit, comme précédemment, les groupes

$$H^p_{\mathrm{B}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(q)) = H^p_{\mathrm{B}}(X, \mathbf{R}(q))^+, \quad H^p_{\mathrm{dR}}(X_{\mathbf{R}}) = H^p_{\mathrm{dR}}(X)^+.$$

4. $\Omega^\bullet$ dénote le complexe des formes différentielles.

On a alors une suite exacte courte

$$0 \to F^q H^p_{\mathrm{dR}}(X_{\mathbf{R}}) \to H^p_{\mathrm{B}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(q-1)) \to H^{p+1}_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{R}(q)) \to 0.$$

En particulier, comme $j > 0$, en posant $p = d+1, q = d+1+j$ dans la suite ci-dessus et en remarquant que $F^{d+1+j} H^{d+1}_{\mathrm{dR}}(X_{\mathbf{R}}) = 0$, on obtient une description de la cohomologie de Deligne

$$H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j)) = H^d_{\mathrm{B}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(d+j)).$$

6.3.3 Cohomologie étale

Soient

$$M_p(-j) = H^d_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p(-j)),$$

$$M^*_p(1+j) = H^d_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p(d+1+j))$$

la réalisation étale p-adique du motif M et celle de son dual. On note

$$H^1_{\text{ét}}(M^*(1+j)) = H^1_{\text{ét}}(\mathscr{O}_K[1/Sp], M^*_p(1+j))$$

le premier groupe de cohomologie étale du motif $M^*(1)$.

6.3.4 Régulateurs

Notons

$$r_\infty : H^1(M^*(1+j)) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \to H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j)),$$

$$r_{\text{ét}} : H^1(M^*(1+j)) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p \to H^1_{\text{ét}}(M^*(1+j)),$$

les régulateurs vers les cohomologies de Deligne et étale du motif $M^*(1+j)$.

6.3.5 Fonction L de X

La fonction L associée à M est définie comme

$$L_S(M,s) = \prod_{v \nmid S} L_v(M,s)^{-1},$$

où v parcourt les places de K qui ne vivent pas au-dessus d'une place de S et où les facteurs locaux $L_v(M,s)$ sont définis par la formule

$$L_v(M,s) = \det(1 - \mathrm{Fr}_v(\mathbf{N}v)^{-s} | M_p^{I_v})$$

pour une place $v \nmid p$, où $I_v \subseteq \mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ est le sous-groupe d'inertie et Fr_v le Frobenius géométrique en v et

$$L_v(M,s) = \det(1 - \varphi^{-1}(\mathbf{N}v)^{-s} | \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(M_p))$$

si $v \mid p$. On a les conjectures habituelles sur cette fonction L : indépendance en p du facteur L_l, prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ et une équation fonctionnelle reliant $L(M,s)$ et $L(M^*(1), 1-s)$. En admettant ces conjectures, on a

$$\mathrm{ord}_{s=0}\, L(M,s) = \dim_{\mathbf{R}} H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1)).$$

Si $j \geq 0$, on a $L(M(-j), s) = L(h(X), s-j)$ et, en remplaçant M par $M(-j)$, la formule ci-dessus donne l'ordre d'annulation de la fonction L du motif $h(X)$ en $s = -j$ en termes de la dimension de $H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j))$.

6.3.6 Une variante de la conjecture de Bloch-Kato

Soit $CH^d(X \times X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ le groupe de Chow de cycles de codimension d de $X \times X$ modulo équivalence rationnelle, vu comme le groupe d'endomorphismes du motif de Chow associé à X. Soit A une sous-$\mathbf{Q}$-algèbre commutative stable par transposition de $CH^d(X \times X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Soient F un corps de nombres, $\lambda : A \to F$ un caractère et $\overline{\lambda} : A \to F$ la composée de λ avec la transposition. Fixons des immersions $F \to \mathbf{C}$ ainsi que $F \to \overline{\mathbf{Q}}_p$.

L'algèbre A agit sur les groupes de cohomologie associés au motif $M^*(1+j)$ et on a, pour tout $j \geq 0$, des groupes $H^1_?(M^*(1+j)) \otimes_A \overline{\lambda}$, pour $? \in \{\mathscr{M}, \mathscr{D}, \text{ét}\}$, ainsi que $L_S(M \otimes_A \lambda, s)$ et des régulateurs

$$r_\infty \otimes_A \overline{\lambda} : (H^1_{\mathscr{M}}(M^*(1+j)) \otimes_A \overline{\lambda}) \otimes \mathbf{R} \to (H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j)) \otimes_A \overline{\lambda}),$$

$$r_{\text{ét}} \otimes_A \overline{\lambda} : (H^1_{\mathscr{M}}(M^*(1+j)) \otimes_A \overline{\lambda}) \otimes \mathbf{Q}_p \to (H^1_{\text{ét}}(M^*(1+j)) \otimes_A \overline{\lambda}).$$

Conjecture 6.3.1. Soient $X, S, A, \lambda, j \geq 0$ comme précédemment. Supposons que $L_S(M \otimes_A \lambda, s)$ admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ et que, pour tout $v \in S$, on a $L_v(M \otimes_A \lambda, 0) \neq 0$. Alors

1. $r_\infty \otimes_A \overline{\lambda}$ et $r_{\text{ét}} \otimes_A \overline{\lambda}$ sont des isomorphismes.
2. $\dim_{\mathbf{Q}} H^1(M^*(1+j)) \otimes_A \overline{\lambda} = \mathrm{ord}_{s=-j} L_S(M \otimes_A \lambda, s)$.
3. Soit δ une base du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $H^d_{\mathrm{B}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{Q}(d+j)) \subseteq H^d_{\mathrm{B}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(d+j)) = H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j))$. Il existe une base ξ du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $H^1(M^*(1+j)) \otimes_A \overline{\lambda}$ telle que
$$r_\infty \otimes_A \overline{\lambda}(\xi) = L^*_{S \cup \{p\}}(M \otimes_A \lambda, -j) \cdot (\delta \otimes_A \overline{\lambda}),$$
où $L^*_{S \cup \{p\}}(M \otimes_A \lambda, -j)$ dénote le premier coefficient non-nul du développement de Taylor de $L_{S \cup \{p\}}(M \otimes_A \lambda, s)$ en $s = -j$.

6.3.7 Le motif d'une forme modulaire

Soient $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N), \omega_f) \otimes \mathbf{C}$, $\check{f} = \sum_{n\geq 1} \overline{a}_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N), \omega_f^{-1}) \otimes \mathbf{C}$ comme précédemment et soit $j > 0$ un entier. Soit $F = \mathbf{Q}(\{a_n : n \geq 1\})$ le corps de nombres engendré par les coefficients de la forme f et notons $\mathbf{T}$ la $\mathbf{Q}$-algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke T_l, $l \nmid N$ et $\lambda : \mathbf{T} \to F$, $\overline{\lambda} : \mathbf{T} \to F$ les caractères associés à f et à $\check{f}$. Enfin, soient v une place de F au dessus de p et supposons que le corps L des coefficients contient F_v.

Rappelons que $Y_1(N)$ dénote la courbe modulaire de niveau $\Gamma_1(N)$ et notons $\mathcal{KS}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}$ la $k-2$-ième variété de Kuga-Sato de niveau $\Gamma_1(N)$. Soit ε l'idempotent comme décrit dans 6.1. On pose $M = M(f)$ le motif associé à la forme f, de sorte que $M^*(1) = M(\check{f})(k)$. On a une description des groupes de cohomologie (cf. [57], [28] ou [36], chap. 2)

$$H^1(M^*(1+j)) = H^k_{\mathscr{M}}(\mathcal{KS}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}, k+j)(\varepsilon) \otimes_{\mathbf{T}} \overline{\lambda},$$

$$H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j)) = H^k_{\mathscr{D}}(\mathcal{KS}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}, \mathbf{R}(k+j))(\varepsilon) \otimes_{\mathbf{T}} \overline{\lambda},$$

$$H^1_{\text{ét}}(M^*(1+j)) = H^1(\mathbf{Q}, H^k_{\text{ét}}(\mathcal{KS}^{k-2}_{\Gamma_1(N),\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p)(k+j)(\varepsilon) \otimes_{\mathbf{T}} \overline{\lambda}),$$

On remarque qu'on a aussi

$$H^1(M^*(1+j)) = H^k_{\mathscr{M}}(\mathscr{E}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}, k+j)(\varepsilon) \otimes_{\mathbf{T}} \overline{\lambda},$$

$$H^1_{\mathscr{D}}(M^*(1+j)) = H^k_{\mathscr{D}}(\mathscr{E}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}, \mathbf{R}(k+j))(\varepsilon) \otimes_{\mathbf{T}} \overline{\lambda},$$

$$\begin{aligned} H^1_{\text{ét}}(M^*(1+j)) &= H^1(\mathbf{Q}, H^{k-1}(\mathscr{E}^{k-2}_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p)(k+j)(\varepsilon)^{\Gamma_1(N)} \otimes_{\mathbf{T}} \overline{\lambda}), \\ &= H^1(\mathbf{Q}, H^1(Y_1(N)_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathrm{Sym}^{k-2}\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p})(k+j) \otimes_{\mathbf{T}} \overline{\lambda}. \end{aligned}$$

6.3.8 Éléments motiviques

Soient e_1, e_2 les éléments de la base canonique de $\mathscr{E}_{\Gamma(N)}[N] \cong (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ correspondant à la base canonique $(1,0)$ et $(0,1)$ de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$. On voit ces éléments dans l'algèbre de groupe $\mathbf{Q}[(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2]$. Si $l \geq 0$, on pose

$$\mathbf{Q}^{(l)}[(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2] = \{\psi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2 \to \mathbf{Q} : \psi(-c,-d) = (-1)^l \psi(c,d)\},$$

$$\mathbf{Q}[\mathbf{Isom}]^{(l)} = \{f : \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \to \mathbf{Q} : f(-g) = (-1)^l f(g)\}.$$

Soit

$$\varrho^l : \mathbf{Q}^{(l)}[(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2] \to \mathbf{Q}[\mathbf{Isom}]^{(l)}$$

l'application horosphérique [5] définie par

$$\varrho^l(\psi)(g) = \frac{N^l+1}{l+2} \sum_{t=(t_1,t_2)\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2} \psi(g^{-1}t)B_{l+2}(t_2/N),$$

où $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(t_1,t_2) = (at_1+bt_2, ct_1+dt_2)$ et B_k est le k-ième polynôme de Bernoulli. Notons aussi

$$\varrho^l : \mathbf{Q}[(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2] \to \mathbf{Q}^{(l)}[(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2] \to \mathbf{Q}[\mathbf{Isom}]^{(l)},$$

où la première flèche est la projection.

On a des applications de résidu GL_2-équivariantes

$$\mathrm{Res}^l : H^{l+1}_{\mathscr{M}}(\mathscr{E}^l, l+1) \to \mathbf{Q}[\mathbf{Isom}]^{(l)}$$

et une inverse à droite, les symboles d'Eisenstein

$$\mathrm{Eis}^l : \mathbf{Q}[\mathbf{Isom}]^{(l)} \to H^{l+1}_{\mathscr{M}}(\mathscr{E}^l, l+1).$$

Enfin, notons, pour $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ tels que $k_1+k_2 = k-2$, $\pi_1 : \mathscr{E}^{k_1+j+k_2} \to \mathscr{E}^{k_1+j}$, $\pi_2 : \mathscr{E}^{k_1+j+k_2} \to \mathscr{E}^{j+k_2}$ et $\pi : \mathscr{E}^{k_1+j+k_2} \to \mathscr{E}^{k_1+k_2}$ les projections sur, respectivement, les premières k_1+j coordonnées, les dernières $j+k_2$ coordonnées, et les k_1+k_2 coordonnées des 'extrémités' (i.e en omettant les j coordonnées du milieu). Soit $j : Y(N) \to Y_1(N)$ donnée sur le problème de module en oublient la première section canonique de torsion. Pour $1 \leq r \leq k-1$, fixons $k_1 = r-1$ et k_2 tel que $k_1+k_2 = k-2$, et posons

$$\mathscr{Z}(k,j,r) = j_*\varepsilon\circ\pi_*(\pi_1^*\mathrm{Eis}^{k_1+j}(\varrho^{k_1+j}(e_1))\cup\pi_2^*(\mathrm{Eis}^{j+k_2}(\varrho^{j+k_2}(e_2))) \in H^k_{\mathscr{M}}(\mathscr{E}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}, k+j)(\varepsilon).$$

Si $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on pose

$$\mathscr{Z}(\check{f}, j, r, \xi) = \xi^*(\mathscr{Z}(k,j,r)) \otimes_{\mathbf{T}} \overline{\lambda} \in H^1(M^*(1+j)).$$

Enfin, comme dans [41] (cf. les remarques après le thm. 6.2.1), on sait ([41], thm. 13.6) que les symboles modulaires $\delta(k,r,\xi)$ (resp. $\delta(\check{f},r,\xi)$), $1 \leq r \leq k-1$, $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ engendrent $V_{k,\mathbf{Z}}(Y(L))$ (resp. $V_{\mathscr{O}_L}(\check{f})$) sur $\mathbf{Z}$ (resp. sur $\mathscr{O}_L$), ce qui nous permet, en prenant des combinaisons linéaires des éléments $\mathscr{Z}(\check{f},j,r,\xi)$, de définir, pour tout $\gamma \in V_L(\check{f})$,

$$\mathscr{Z}(\check{f}, j, \gamma) \in H^1(M^*(1+j)).$$

Proposition 6.3.2 (cf. [36], thm. 4.1.1)**.** *Soient $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et $\delta = \delta(\check{f}, r, \xi)$. Alors*

$$r_\infty(\mathscr{Z}_{\mathrm{Kato}}(\check{f}, j, r, \xi)) = L^{(N),*}(f, -j)\cdot\delta,$$

5. cf. [36], chap. 3, et les références indiquées là pour tous les objets introduits dans la suite.

où $L^{(N),*}(f,-j)$ *dénote le coefficient principal de la série de Laurent en* $s=-j$ *de la fonction* L *de* f *sans ses facteurs en les places divisant* N.

6.4 Plongements p-adiques des valeurs spéciales

Soient f comme ci-dessus et $\eta : \mathbf{Z}_p^\times \to L$ d'ordre fini, vu comme un caractère de Dirichlet en fixant un isomorphisme entre $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $\mathbf{C}$. La proposition 6.3.2 nous permet, en utilisant les régulateurs p-adiques, de donner un sens p-adique aux valeurs spéciales en déhors de la bande critique de la fonction L associée à f.

6.4.1 Cohomologie syntomique

Citons les résultats concernant la cohomologie syntomique des variétés lisses dont on aura besoin.

Théorème 6.4.1 ([50], thm. A, prop. 1.1)**.** *Soit* K *un corps* p*-adique et soit* X *une variété (i.e un schéma séparé de type fini) sur* K. *Il existe une* $\mathbf{Q}_p$*-algèbre graduée canonique* $\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}(X_h,*)$ [6], *commutative et graduée, satisfaisant les propriétés suivantes*

1. $\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}(X_h,*)$ *est fonctorielle en* X.
2. *On a des morphismes fonctoriels de périodes syntomiques*
$$\rho_{\mathrm{syn}} : \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}(X_h,r) \to \mathbf{R}\Gamma_{\acute{e}t}(X_{\acute{e}t},\mathbf{Q}_p(r))$$
3. *On a des réalisations fonctorielles*
$$\mathrm{r}_p : H^i_{\mathscr{M}}(X,r) \to H^i_{\mathrm{syn}}(X_h,r),$$
de la cohomologie motivique de Voevodsky vers la cohomologie syntomique compatibles avec le morphisme de périodes syntomique.
4. *Pour* $X=\mathrm{Spec}(K)$,
$$H^i_{\mathrm{syn}}(X_h,r) \cong H^i_{\mathrm{st}}(K,\mathbf{Q}_p(r)),$$
où $H^i_{\mathrm{st}}(K,-)$ *dénote* $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{Q}_p,-)$ *dans la catégorie dans la catégorie des représentations potentiellement semi-stables de* $\mathscr{G}_K$.
5. *On a une suite spectrale de Hochschild-Serre syntomique*
$${}^{\mathrm{syn}}E_2^{i,j} = H^i_{\mathrm{st}}(K, H^j_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}},\mathbf{Q}_p(r))) \implies H^{i+j}_{\mathrm{syn}}(X_h,r)$$

6. X_h dénote le fait que l'on prend la cohomologie dans la h-topologie : c'est la topologie plus grossière qui est plus fine que la topologie de Zariski et la topologie propre (recrouvrements par des morphismes propres), voir [50], 2.3.

analogue à la suite spectrale étale

$$^{ét}E_2^{i,j} = H^i(K, H^j_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p(r))) \implies H^{i+j}_{ét}(X, r)$$

et un morphisme canonique de suites spectrales $^{\mathrm{syn}}E_k \to {}^{ét}E_k$ *compatible avec le morphisme de périodes syntomique.*

6. *Soit* $i \geq 0$. *La composition*

$$H^{i-1}_{\mathrm{dR}}(X)/\mathrm{Fil}^r H^{i-1}_{\mathrm{dR}}(X) \xrightarrow{\partial} H^i_{\mathrm{syn}}(X_h, r) \xrightarrow{\rho_{\mathrm{syn}}} H^i_{ét}(X, \mathbf{Q}_p(r)) \to H^i_{ét}(X_{\overline{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_p(r))$$

est nulle et l'application qui se déduit de la suite spectrale de Hochschild-Serre syntomique

$$H^{i-1}_{\mathrm{dR}}(X)/\mathrm{Fil}^r H^{i-1}_{\mathrm{dR}}(X) \to H^1(K, H^{i-1}_{ét}(X_{\overline{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_p(r)))$$

coïncide avec l'application exponentielle de Bloch-Kato de la représentation $H^{i-1}_{ét}(X_{\overline{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_p(r))$ *du groupe de Galois absolu* $\mathscr{G}_K$ *de* K.

Remarquons que, pour une représentation de de Rham V, le module $H^1_{\mathrm{st}}(\mathbf{Q}_p, V)$ des classes d'équivalences d'extensions de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de de Rham de $\mathbf{Q}_p$ par V s'identifie au groupe de Selmer $H^1_{\mathrm{g}}(\mathbf{Q}_p, V) = \ker(H^1(\mathbf{Q}_p, V) \to H^1(\mathbf{Q}_p, V \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}))$, qui n'est autre chose que le noyau de l'application exponentielle duale $\exp^*_V : H^1(\mathbf{Q}_p, V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, et s'identifie (au moins si 1 n'est pas une valeur propre du Frobenius agissant sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$) au dual de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ vu dedans $H^1(\mathbf{Q}_p, V)$ via l'application exponentielle.

En particulier, considérons $X = \mathcal{KS}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}$, $i = k+1$ et $r = k+j$ (et donc $\mathrm{Fil}^{k+j}\ H^k_{\mathrm{dR}}(\mathcal{KS}^{k-2}_{\Gamma_1(N)}) = 0$). En projetant sur la partie correspondante à la forme $\check{f}$, on obtient, pour $j \geq 0$, des régulateurs p-adiques

$$r_p : H^1(M^*(1+j)) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(M^*_p(1+j)),$$

et le dernier point du théorème [50] se traduit par le fait que

$$\exp \circ r_p = r_{\text{ét}}.$$

6.4.2 Transmutation

Rappelons que $\mathbf{D}(M^*_p(1)) = D(\check{f})(k)$ et notons

$$D = D(\check{f})(k-1),$$

qui est de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et $k-1$. On a, inspirés de la proposition 6.3.2, envie de voir les éléments $r_p(\mathscr{Z}_{\mathrm{Kato}}(\check{f} \otimes \eta, j, r, \xi)) \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D(\eta\chi^{j+1}))$ comme les transmutations des valeur spéciales $L(f, \eta^{-1}, j)$ en p-adique. Or, comme on l'a déjà remarqué, afin de construire une fonction interpolant ces valeurs, il faut les voir tous dans un même module. Notons, pour η un caractère de Dirichlet,

$$\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},s)=\frac{\Gamma(s)}{(2i\pi)^s}\cdot L(f,\eta^{-1},s).$$

On pose [7], pour $j\geq 0$,

$$\iota_p(\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},-j))=\Gamma^*(-j)\cdot G(\eta)\cdot r_p(\mathscr{Z}(\check{f}\otimes\eta,j,j,\xi))\otimes \mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j-1}\in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D).$$

Pour l'interprétation p-adique des valeurs $L(f,\eta,-j)$, $j>k$, on fera appel à l'équation fonctionnelle de la fonction L locale, qui s'avéra fortement ressemblante à l'équation fonctionnelle complexe. Notons $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ le groupe des adèles de $\mathbf{Q}$. Soit $\eta:\mathbf{Z}_p^\times\to L$ un caractère d'ordre fini. La forme $f\otimes\eta$ est supercuspidale et on note

$$\pi(f\otimes\eta)=\bigotimes_l{}'\pi_l(f\otimes\eta)$$

la représentation automorphe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ associée à $f\otimes\eta$. On a $\pi(f\otimes\eta)=\pi(f)\otimes\eta=\bigotimes'_l\pi_l(f)\otimes\eta$ [8]. Notons $\varepsilon(\pi(f)\otimes\eta,s)$ le facteur epsilon global de la représentation $\pi(f\otimes\eta)$ défini par [9]

$$\varepsilon(\pi(f)\otimes\eta,s)=\varepsilon(\pi_\infty(f)\otimes\eta,s)\cdot\prod_l\varepsilon(\pi_l(f)\otimes\eta,s),$$

où $\varepsilon(\pi_l(f)\otimes\eta,s)$ est le facteur epsilon de la représentation $\pi_l(f)\otimes\eta$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_l)$, comme décrit dans 4.2.1, et $\varepsilon(\pi_\infty(f)\otimes\eta,s)=i^k$.

La fonction L complexe satisfait l'équation fonctionnelle [10]

$$\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\cdot L(f,\eta^{-1},s)=\varepsilon(\pi(f)\otimes\eta^{-1},s-\frac{k-1}{2})\cdot\frac{\Gamma(k-s)}{(2\pi)^{k-s}}\cdot L(\check{f},\eta,k-s).$$

Si $j\geq k$ est un entier, on peut écrire l'équation fonctionnelle sous la forme

$$\frac{\Gamma(j)}{(2i\pi)^j}\cdot L(f,\eta^{-1},j)=i^k(-1)^{-j}\varepsilon(\pi(f)\otimes\eta^{-1}\otimes|\cdot|^{j-\frac{k-1}{2}})\cdot\frac{\Gamma(k-j)}{(2i\pi)^{k-j}}\cdot L(\check{f},\eta,k-j),$$

7. Notons comme dans l'introduction que, dans la formule, on "mutiplie" et "divise" par la somme de Gauss de η, de sorte qu'elle n'a moralement aucun effet. Le terme $2i\pi$ correspond, dans le monde p-adique, à l'élément t de Fontaine, comme d'habitude. Enfin, le facteur $\Gamma^*(j)$ est le coefficient principal de la série de Laurent de $\Gamma(s)$ en $s=-j$, où elle a un pôle simple.

8. Noter que, si $\eta:\mathbf{Z}_p^\times\to L^\times$ est de conducteur p^n, il est vu comme un caractère des idèles en utilisant la décomposition $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}=\mathbf{Q}^\times\times\mathbf{R}^{>0}\times\widehat{\mathbf{Z}}^\times$. Le caractère de $\mathbf{Q}_p^\times$ induit par η est η (avec $\eta(p)=1$) et, si $l\neq p$, celui de $\mathbf{Q}_l^\times$, est le caractère η^{-1} prenant la valeur $\eta^{-1}(\bar{l})$ en l, où $\bar{l}\in\mathbf{Z}_p^\times$ est n'importe quel relèvement de la classe de l modulo p^n.

9. le produit étant fini car $\pi_l(f\otimes\eta)$ est non ramifiée en presque toute place

10. Le décalage en $\frac{k-1}{2}$ provient du fait que les facteurs locaux des représentations de GL_2 sont normalisés de sorte que le centre de symétrie de l'équation fonctionnelle des fonctions L soit situé en $1/2$, tandis que celui des fonctions L automorphes l'est en $\frac{k-1}{2}$.

ou bien

$$\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j) = i^k(-1)^{-j}\varepsilon(\pi(f)\otimes\eta^{-1}\otimes|\cdot|^{j-\frac{k-1}{2}})\cdot\Lambda_\infty(\check{f},\eta,k-j).$$

Rappelons que la restriction à $\mathbf{Q}_l^\times$ du caractère de Hecke induit par η^{-1} a un comportement différent selon que $l=p$ ou que $l\neq p$. Si $l\neq p$, le caractère induit est η (i.e le caractère non-ramifiée prenant la valeur $\eta(l)$ en l), et, sur $\mathbf{Q}_p^\times$, on récupère $\eta^{-1}:\mathbf{Q}_p^\times\to L^\times$ (avec $\eta^{-1}(p)=1$). On peut donc écrire l'équation fonctionnelle de la façon suivante :

$$\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j) = (-1)^{k-j}\varepsilon(\pi_p(f)\otimes\eta^{-1}\otimes|\cdot|^{j-\frac{k-1}{2}})\cdot\prod_{l|N'}\varepsilon(\pi_l(f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{j-\frac{k-1}{2}})\cdot\Lambda_\infty(\check{f},\eta,k-j).$$

Remarquons pour finir que, si l'on écrit $N=N'p^r$, alors, pour $p\neq l\mid N$, on a l'égalité

$$\varepsilon(\pi_l(f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{j-\frac{k-1}{2}}) = \varepsilon(\pi_l(f))\cdot\eta(l)^{c(\pi_l(f))}\cdot l^{-c(\pi_l(f))(j-\frac{k-1}{2})},$$

et, en utilisant le fait que le conducteur de $\pi_l(f)$ est $l^{v_l(N)}$, on en déduit

$$\prod_{l|N'}\varepsilon(\pi_l(f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{j-\frac{k-1}{2}}) = \prod_{l|N'}\varepsilon(\pi_l(f))\cdot\eta(N')(N')^{\frac{k-1}{2}-j}$$

6.5 Interpolation

Dans cette section, on démontre que les construction faites dans les chapitres précédents nous permettent d'interpoler les plongements p-adiques des valeurs spéciales de la fonction L de f que l'on a défini dans 6.4.2. Ceci constitue la preuve du théorème 6.0.1 annoncé au début du chapitre. On démontre d'abord, en utilisant un théorème de Gealy reliant les classes de cohomologie motivique $\mathscr{Z}(\check{f}\otimes\eta,j,r,\xi)$ au système d'Euler de Kato et le théorème 3.3.14, les propriétés d'interpolation des valeurs spéciales aux entiers négatifs. Finalement, en utilisant une équation fonctionnelle du système d'Euler de Kato établie par Nakamura et l'équation fonctionnelle du théorème 4.6.4, on obtient l'interpolation des valeurs spéciales aux entiers positifs $j\geq k$. On sait déjà, d'après les résultats de Kato, que les valeurs interpolés par notre fonction dans la bande critique s'interprètent bien en termes des valeurs spéciales complexes, ce qui donne une image complète des valeurs interpolés par la fonction L p-adique d'une forme modulaire.

6.5.1 Relèvement motiviques des éléments de Kato

Rappelons que, pour chaque $\gamma\in V_L(\check{f})$, on a des éléments dans la cohomologie d'Iwasawa

$$\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k+j) = (\mathbf{z}_{p^n}^{(p)}(\check{f},-j,r,\xi))_{n\geq 1}\in H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q},V(\check{f})(k+j))$$

fournis par le théorème 6.2.1 de Kato.

Proposition 6.5.1 ([36], prop. 9.1.1). *Soit $\gamma \in V_L(\check{f})$. Alors*

$$r_{ét}(\mathscr{Z}(\check{f}, j, \gamma)) = \int_\Gamma 1 \cdot \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k+j).$$

Remarque 6.5.2.

— La proposition 9.1.1 de [36] montre le résultat pour $\gamma = \delta(\check{f}, r, \mathrm{id})$. Le cas ξ quelconque s'en déduit des compatibilités des réalisations par des correspondances algébriques et de la définition des éléments zêta, et le cas d'un élément γ quelconque suit par linéarité.

— Remarquons que, par construction, $\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k+j) = \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k) \otimes e_j$ et la proposition ci-dessus s'exprime donc aussi comme

$$r_{\text{ét}}(\mathscr{Z}(\check{f}, j, r, \xi)) = \int_\Gamma \chi^j \cdot \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k).$$

6.5.2 Interpolation aux entiers négatifs

Notons

$$D(f) = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_L(f) \mid_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}), \quad D(\check{f}) = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_L(\check{f}) \mid_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}) \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathscr{R})$$

les (φ, Γ)-modules associés aux formes f et $\check{f}$. Rappelons que l'on a posé $D = D(\check{f})(k-1)$, qui est de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et $k-1$, et notons

$$\mathbf{z}_{\text{Kato}} = \text{Exp}^*(\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k-1)) \in \mathbf{D}_{\text{rig}}(V(\check{f})(k-1)))^{\psi=1} = D^{\psi=1}.$$

Lemme 6.5.3. *Soit $j \geq 0$. On a*

$$\Lambda_{D, \mathbf{z}_{\text{Kato}}}(\eta\chi^{-j-1}) = p^{-nj}\, G(\eta)^{-1} \cdot \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j)).$$

Démonstration. Par construction du système d'Euler, on sait que

$$\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f} \otimes \eta)(k-j) = \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k-1) \otimes e_\eta \otimes e_{j+1} = \mu_{\mathbf{z}_{\text{Kato}}} \otimes e_\eta \otimes e_{j+1}.$$

Par le théorème 6.5.1 de Gealy, on a alors

$$\begin{aligned} \exp^{-1}(r_{\text{ét}}(\mathscr{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, r, \xi))) &= \exp^{-1}(\int_\Gamma 1 \cdot \mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k+j)) \\ &= \exp^{-1}(\int_\Gamma 1 \cdot \mu_{\mathbf{z}_{\text{Kato}} \otimes e_\eta \otimes e_{j+1}}) \\ &= \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^{j+1} \cdot \mu_{\mathbf{z}_{\text{Kato}}}), \end{aligned}$$

d'où, par la compatibilité entre le régulateur p-adique et le régulateur étale, on en déduit

$$\begin{aligned}\iota_p(\Lambda_\infty(f,\eta^{-j},-j)) &= \Gamma^*(-j)\ G(\eta)\cdot r_p(\mathscr{Z}(\check{f}\otimes\eta,j,r,\xi))\otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee}\\ &= \Gamma^*(-j)\ G(\eta)\cdot \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^{j+1}\cdot \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}})\otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee}\end{aligned}$$

Par ailleurs, le théorème 3.3.14 affirme que

$$\Lambda_{D,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}(\eta\chi^{-j-1}) = p^{-nj}\ \Gamma^*(-j)\cdot \exp^{-1}(\int_\Gamma \eta\chi^{j+1}\cdot \mu_{\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}})\otimes,$$

d'où le résultat. □

6.5.3 L'équation fonctionnelle du système d'Euler de Kato, d'après Nakamura

Si $\gamma\in V_L(\check{f})$, notons $\check{\gamma}\in V_L(f)$ l'élément dual à $\gamma\otimes e_k$ sous l'accouplement parfait $V_L(\check{f})(k)\times V_L(f)\to L$.

Écrivons $N=N'p^r$, $(N',N)=1$. On note

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}} = \mathrm{Exp}^*(\mathbf{z}_\gamma^{(p)}(\check{f})(k-1))\in D(f)(k-1)^{\psi=1}=D^{\psi=1},$$

$$\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}} = \mathrm{Exp}^*(\mathbf{z}_{\check{\gamma}}^{(p)}(f)(k-1))\in D(f)(k-1)^{\psi=1}=\check{D}(k-2)^{\psi=1},$$

$$\mathbf{z}^*_{\mathrm{Kato}} = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w_D(\tilde{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}))\otimes e_{\omega_D}^\vee\in \check{D}^{\psi=1}$$

les tordus des systèmes d'Euler associés aux formes $\check{f}$ et f (cf. thm. 6.2.1) et l'image par l'involution de z (cf. 4.6 où $\mathbf{z}^*_{\mathrm{Kato}}$ est noté $\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}[k-1]$), respectivement.

Proposition 6.5.4 ([49], thm. 4.7). *Notons* $[N']=\prod_{l|N'}[\sigma_l]^{v_l(N')}\in\Lambda$. *Alors*

$$\mathbf{z}^*_{\mathrm{Kato}}\otimes e_{k-1} = -\prod_{l\nmid N}\varepsilon(\pi_l(f)\otimes|\cdot|^{\frac{k-1}{2}})\cdot([N']\cdot(\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}\otimes e_{2-k})\otimes e_{k-1}).$$

Remarque 6.5.5.

— Le théorème 4.7 de [49] est énoncé en termes de facteurs epsilon des représentations de Weil-Deligne. Sa démonstration est basée sur la compatibilité locale-globale de la correspondance de Langlands classique et la proposition 3.15 de [49]. Cette dernière proposition peut être énoncée naturellement (cf. thm. 4.5.1) en termes de facteurs locaux des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. La preuve de la proposition ne ferait donc pas usage de la compatibilité locale-globale dans la correspondance de Langland p-adique.

— Il faut faire un peu d'attention car les normalisations des facteurs locaux dans ce travail ne coïncident pas avec celles de [49]. Comme on l'a remarqué, dans le texte présent, les facteurs locaux des représentations lisses sont normalisés de sorte que l'équation fonctionnelle de la fonction L soit centrée en $s = 1/2$, tandis que, dans [49], elle est centrée en $s = \frac{k-1}{2}$. La différence entre les facteurs locaux est donc un twist par $|\cdot|^{-\frac{k-1}{2}}$.

— Le résultat ci-dessus devrait, dans le cas triangulin, pouvoir être déduit de l'équation fonctionnelle de la fonction L p-adique de la forme modulaire (cf. [46], section 17, cor. 2). La construction d'un système d'Euler de Kato universel permettrait, par des arguments de prolongement analytique, d'en déduire la proposition à partir du cas triangulin.

6.5.4 L'équation fonctionnelle de la fonction L p-adique

L'équation fonctionnelle du système d'Euler de Kato et l'équation fonctionnelle 4.6.4 nous permettent d'interpréter les valeurs aux entiers positifs de la fonction $\Lambda_{D,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}$.

Théorème 6.5.6. *Soit $j > 0$ un entier. Alors*

$$\Lambda_{D,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}(\eta\chi^j) = C(f,\eta,j)\cdot\Lambda_{\check{D}(k-1),\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}}(\eta^{-1}\chi^{-j+k-2})\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{k-1,\omega_D^{-1}},$$

où

$$C(f,\eta,j) = \Omega\cdot G(\eta^{-1})^2\cdot\varepsilon(\pi_p(\check{f})\otimes\eta\otimes|\cdot|^{\frac{k-1}{2}})^{-1}\cdot\prod_{l|N'}\varepsilon(\pi_l(\check{f})\otimes\eta\otimes|\cdot|^{j+\frac{k-1}{2}}).$$

Démonstration. En appliquant le théorème 4.5.3 (noter que D est à poids de Hodge-Tate 0 et $k-1$ et donc le k du théorème change !), on obtient

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = -\Omega\cdot p^{-n(k-2)}\omega_{\pi(D)}(c_\eta)\cdot\Lambda_{\check{D}(k-1),\mathbf{z}^*_{\mathrm{Kato}}\otimes e_{k-1}}(\eta^{-1}\chi^{-j+k-1})\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{k-1,\omega_D^{-1}}.$$

Par ailleurs, par définition de l'action de $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[\mathbf{Z}_p^\times]]$ sur $D^{\psi=1}$, on sait que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \eta^{-1}\chi^{j-k+1}\cdot\mu_{([N']\cdot\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}\otimes e_{2-k})\otimes e_{k-1}} &= \int_\Gamma\eta^{-1}\chi^j\cdot\mu_{[N']\cdot(\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}\otimes e_{2-k})}\\ &= \eta(N')(N')^{-j}\int_\Gamma\eta^{-1}\chi^j\cdot\mu_{\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}\otimes e_{2-k}}\\ &= \eta(N')(N')^{-j}\int_\Gamma\eta^{-1}\chi^{j-k+2}\cdot\mu_{\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}},\end{aligned}$$

d'où, en utilisant la proposition 6.5.4, on déduit

$$\Lambda_{\check{D}(k-1),\mathbf{z}^*_{\mathrm{Kato}}\otimes e_{k-1}}(\eta^{-1}\chi^{-j+k-1}) = -\prod_{l|N'}\varepsilon(\pi_l(\check{f})\otimes|\cdot|^{\frac{k-1}{2}})\cdot\eta(N')(N')^{-j}\cdot\Lambda_{\check{D}(k-1),\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}}(\eta^{-1}\chi^{-j+k-1}).$$

En rassemblant ces formules, on obtient que $\Lambda_{D,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}(\eta\chi^j)$ est donné par la formule

$$\Omega\cdot p^{-n(k-2)}\omega_{\pi(D)}(c_\eta)\cdot\prod_{l|N'}\varepsilon(\pi_l(\check f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{j+\frac{k-1}{2}})\cdot\Lambda_{\check D(k-1),\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}}(\eta^{-1}\chi^{-j+k-2})\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{k-1,\omega_D^{-1}}.$$

Remarquons finalement que, par la proposition 4.2.1, $\omega_{\pi(D)}(c_\eta)=\varepsilon(\eta)^2\varepsilon(\pi(D)\otimes\eta)^{-1}$, et, en utilisant que $\pi(D)=\pi_p(\check f)\otimes|\cdot|^{k-1}$ et le fait (cf. [2] thm. 3.1) que le conducteur de $\pi_p(\check f\otimes\eta)$, pour η de conducteur p^n, $n>r$, est p^{2n}, on en déduit la formule

$$p^{-n(k-1)}\varepsilon(\pi(D)\otimes\eta)^{-1}=\varepsilon(\pi_p(\check f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{\frac{k-1}{2}})^{-1}.$$

Enfin, la formule $\varepsilon(\eta)^2=p^{-n}G(\eta^{-1})^2$ permet de conclure. □

6.5.5 Interpolation aux entiers $\geq k$

On obtient, comme corollaire de l'équation fonctionnelle ci-dessus, le résultat suivant, qui donne une interprétation des valeurs interpolés aux entiers positifs par la fonction $\Lambda_{D,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}$.

Lemme 6.5.7. *Soit $j\geq k$. Alors*

$$\Lambda_{D,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}(\eta\chi^j)=p^{n(j+1)}G(\eta)^{-1}\cdot C\cdot\iota_p(\Lambda_\infty(\check f,\eta,k-j-1))\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{k-1,\omega_D^{-1}},$$

où

$$C=\eta(-1)\,\Omega\cdot\varepsilon(\pi_p(\check f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{-j+k-1})^{-1}\cdot\prod_{l|N'}\varepsilon(\pi_l(\check f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{j+\frac{k-1}{2}}).$$

Démonstration. On a, par le lemme 6.5.3 appliqué à $\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}$,

$$\Lambda_{\check D(k-1),\check{\mathbf{z}}_{\mathrm{Kato}}}(\eta^{-1}\chi^{-j+k-2})=p^{-n(j-k+1)}\,G(\eta^{-1})^{-1}\cdot\iota_p(\Lambda_\infty(\check f,\eta,-j+k-1)).$$

Par ailleurs, $G(\eta^{-1})=G(\eta)^{-1}\eta(-1)p^n$ et on peut donc écrire

$$p^{-n(j-k+1)}\,G(\eta^{-1})\cdot\varepsilon(\pi_p(\check f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{\frac{k-1}{2}})^{-1}=p^{n(j+1)}\,G(\eta)^{-1}\,\eta(-1)\cdot\varepsilon(\pi_p(\check f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{-j+k-1})^{-1},$$

ce qui permet de conclure. □

Le résultat ci-dessus nous amène à poser

$$\iota_p(\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j+1))=C\cdot\iota_p(\Lambda_\infty(\check f,\eta,k-j-1))\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR}}_{k-1,\omega_D^{-1}},$$

$$C=\eta(-1)\,\Omega\cdot\varepsilon(\pi_p(\check f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{-j+k-1})^{-1}\cdot\prod_{l|N'}\varepsilon(\pi_l(\check f)\otimes\eta\otimes|\cdot|^{j+\frac{k-1}{2}}),$$

et le lemme se traduit, par définition, en la formule

$$\Lambda_{D,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}(\eta\chi^j) = p^{-n(j+1)}G(\eta)^{-1}\cdot\iota_p(\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j+1)),\quad j\geq k.$$

6.5.6 La bande critique

Si $0\leq j\leq k-1$, on pose

$$\iota_p(\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j+1)) = \Gamma^*(j)\ G(\eta)\cdot\exp^*(\int_\Gamma \eta\chi^{-j}\cdot\mu_{\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}})\otimes\mathbf{e}^{\mathrm{dR},\vee}_{\eta,-j}.$$

On sait, d'après le théorème 6.2.1 de Kato, que l'image de ces valeurs par l'application de périodes est donnée par la valeur spéciale $\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j+1)$. Et, par ce qu'on a déjà vu, le lemme suivant est immédiat

Lemme 6.5.8. *Soit* $0\leq j\leq k-1$. *Alors*

$$\Lambda_{D,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}}(\eta\chi^j) = p^{n(j+1)}\ G(\eta)^{-1}\cdot\iota_p(\Lambda_\infty(f,\eta^{-1},j+1)).$$

Ceci finit, enfin ! la preuve du théorème 6.0.1, ainsi que cette thèse.

Tâchez de garder toujours un morceau de ciel
au-dessus de votre vie, petit garçon.

Marcel Proust, *Du côté de chez Swann*

Bibliographie

[1] AMICE, Y. ET VÉLU, J. Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke. *Astérisque*, 24–25 (1975), 119–131.

[2] ATKIN, A. O. L. ET LI, W. C. W. Twists of newforms and pseudo-eigenvalues of W-operators. *Invent. Math. 48* (1978), 221–243.

[3] BEĬLINSON, A. A. Higher regulators and values of L-functions. *J. of Soviet Math.*, 30 (1985), 2036–2070.

[4] BEĬLINSON, A. A. Higher regulators of modular curves. In *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory,*, vol. 55 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 1–34.

[5] BENOIS, D. ET BERGER, L. Théorie d'Iwasawa des représentations cristallines. II. *Comment. Math. Helv. 83*, 3 (2008), 603–677.

[6] BENOIS, D. ET BERGER, L. Théorie d'Iwasawa des représentations cristallines. II. *Comment. Math. Helv. 83*, 3 (2008), 603–677.

[7] BERGER, L. Représentations p-adiques et équations différentielles. *Invent. Math. 148*, 2 (2002), 219–284.

[8] BERGER, L. Bloch and Kato's exponential map : three explicit formulas. *Doc. Math.*, Extra Vol. (2003), 99–129.

[9] BERGER, L. Équations différentielles p-adiques et (ϕ, N)-modules filtrés. *Astérisque*, 319 (2008), 13–38.

[10] BESSER, A. Syntomic regulators and p-adic integration. I. Rigid syntomic regulators. In *Proceedings of the Conference on p-adic Aspects of the Theory of Automorphic Representations* (2000), vol. 120, pp. 291–334.

[11] BLOCH, S. ET KATO, K. L-functions and Tamagawa numbers of motives. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, vol. 86 of *Progr. Math.* 1990, pp. 333–400.

[12] BUSHNELL, C. J. ET HENNIART, G. *The local Langlands conjecture for* GL(2). Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[13] CHERBONNIER, F. ET COLMEZ, P. Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local. *J. Amer. Math. Soc. 12*, 1 (1999), 241–268.

[14] Coates, J. et Sujatha, R. *Cyclotomic fields and zeta values.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[15] Colmez, P. et Dospinescu, G. Complétés universels de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. *Algebra and Number Theory 8* (2014), 1447–1519.

[16] Colmez, P. Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local. *Ann. of Math. (2) 148*, 2 (1998), 485–571.

[17] Colmez, P. Fonctions L p-adiques. *Astérisque*, 266 (2000), Exp. No. 851, 3, 21–58. Séminaire Bourbaki, Vol. 1998/99.

[18] Colmez, P. Arithmétique de la fonction zêta. In *La fonction zêta.* Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2003, pp. 37–164.

[19] Colmez, P. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique. *Astérisque*, 294 (2004), 251–319.

[20] Colmez, P. Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham. *Astérisque*, 319 (2008), 117–186.

[21] Colmez, P. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules. *Astérisque*, 330 (2010), 281–509.

[22] Colmez, P. (φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. *Astérisque*, 330 (2010), 61–153.

[23] Colmez, P. La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques. *Automorphic Forms and Galois Representations*, 1 (2014), 286–358.

[24] Colmez, P. Correspondance de langlands p-adique et changement de poids. *preprint* (2015).

[25] Colmez, P. et Niziol, W. Syntomic complexes and p-adic nearby cycles. *preprint* (2015).

[26] Delbourgo, D. On the p-adic Birch, Swinnerton-Dyer conjecture for non-semistable reduction. *J. Number Theory 95*, 1 (2002), 38–71.

[27] Deligne, P. Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L. In *Modular functions of one variable, II*, vol. 349 of *Lecture Notes in Math.* Springer, 1973, pp. 501–597.

[28] Deninger, C. et Scholl, A. J. The Beĭlinson conjectures. In *L-functions and arithmetic*, vol. 153 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, pp. 173–209.

[29] Dospinescu, G. Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique. *Math. Ann. 354*, 2 (2012), 627–657.

[30] Emerton, M. p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups. *Duke Math. J. 130*, 2 (2005), 353–392.

[31] Emerton, M. Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbf{Q}}$. *preprint* (2011).

[32] Fontaine, J.-M. Représentations p-adiques des corps locaux. I. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, vol. 87 of *Progr. Math.* Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 249–309.

[33] Fourquaux, L. et Xie, B. Triangulable $\mathcal{O}_f$-analytic (φ_q, γ)-modules of rank 2. *Algebra Number Theory 7* (2013), 2545–2592.

[34] Fukaya, T. et Kato, K. A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory. In *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XII* (2006), vol. 219 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, Amer. Math. Soc., pp. 1–85.

[35] Gealy, M. T. Special values of p-adic l functions associated to modular forms.

[36] Gealy, M. T. *On the Tamagawa number conjecture for motives attached to modular forms.* ProQuest LLC, 2006. Thèse (Ph. D).

[37] Gros, M. Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions L p-adiques. I. *Invent. Math. 99*, 2 (1990), 293–320.

[38] Herr, L. Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate. *Math. Ann. 320*, 2 (2001), 307–337.

[39] Kato, K. Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. II.

[40] Kato, K. Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. I. In *Arithmetic algebraic geometry*, vol. 1553 of *Lecture Notes in Math.* Springer, 1993, pp. 50–163.

[41] Kato, K. p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. *Astérisque*, 295 (2004), 117–290.

[42] Kedlaya, K. S., Pottharst, J. et Xiao, L. Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ)-modules. *J. Amer. Math. Soc. 27*, 4 (2014), 1043–1115.

[43] Liu, R. Cohomology and duality for (ϕ, Γ)-modules over the Robba ring. *Int. Math. Res.*, 3 (2008).

[44] Loeffler, D., Venjakob, O. et Zerbes, S. L. Local epsilon isomorphisms. *Kyoto J. Math. 55*, 1 (2015), 63–127.

[45] Manin, J. I. Periods of cusp forms, and p-adic Hecke series. *Mat. Sb. 92* (1973), 378–401.

[46] Mazur, B., Tate, J. et Teitelbaum, J. On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. *Invent. Math. 84* (1986), 1–48.

[47] NAKAMURA, K. Iwasawa theory of de Rham (φ, Γ)-modules over the Robba ring. *J. Inst. Math. Jussieu 13*, 1 (2014), 65–118.

[48] NAKAMURA, K. A generalization of Kato's local ε-conjecture for (φ, Γ)-modules over the Robba ring. *preprint* (2015).

[49] NAKAMURA, K. Local ε-isomorphisms for rank two p-adic representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ and a functional equation of Kato's Euler system. *preprint* (2015).

[50] NEKOVAR, J. ET NIZIOL, W. Syntomic cohomology and regulators for varieties over p-adic fields. *preprint* (2013).

[51] NIZIOL, W. On the image of p-adic regulators. *Invent. Math. 127*, 2 (1997), 375–400.

[52] PERRIN-RIOU, B. Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local. *Invent. Math. 115*, 1 (1994), 81–161.

[53] PERRIN-RIOU, B. Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques. *Astérisque*, 229 (1995), 198.

[54] POTTHARST, J. Cyclotomic Iwasawa theory of motives. *preprint* (2012).

[55] SCHMIDT, R. Some remarks on local newforms for GL(2). *J. Ramanujan Math. Soc. 17*, 2 (2002), 115–147.

[56] SCHNEIDER, P. ET TEITELBAUM, J. Algebras of p-adic distributions and admissible representations. *Invent. Math. 153*, 1 (2003), 145–196.

[57] SCHOLL, A. J. Motives for modular forms. *Invent. Math. 100*, 2 (1990), 419–430.

[58] VIŠIK, M. M. Nonarchimedean measures associated with Dirichlet series. *Mat. Sb. 99*, 2 (1976), 248–260.