LA DEFINIZIONE NEI SISTEMI LOGICI DI S.LEŚNIEWSKI

FABIO ZANASI

1 Una fondazione nominalista della matematica

Stanislaw Leśniewski (1886-1939) è stato uno dei principali esponenti della scuola logica polacca, attiva a Leopoli e Varsavia nel periodo tra l'inizio del ventesimo secolo e la seconda guerra mondiale.

In quegli anni era in atto la cosiddetta "crisi dei fondamenti" della matematica: una fase di ripensamento delle basi stesse della disciplina, che aveva avuto origine dalla scoperta del paradosso di Russell, nel 1902. Otto anni piú tardi, lo stesso autore inglese aveva proposto i *Principia Mathematica*[1]: una ricostruzione dei fondamenti della matematica su basi logiche, nel tentativo di eliminare le antinomie che ne avevano determinato la crisi.

Anche Leśniewski aveva indagato il paradosso di Russell, e ne aveva fornito una propria soluzione, che divergeva fortemente da quanto esposto nei *Principia*. Egli si rese autore di un sistema fondazionale alternativo, basato su calcoli logici assiomatici chiamati *Prototetica*, *Ontologia* e *Mereologia*.

Ad una prima approssimazione, è possibile concepire la *Prototetica* come un calcolo proposizionale con quantificatori e funzioni su proposizioni di ordine arbitrario. L'*Ontologia* è una sua estensione propria, paragonabile per certi aspetti alla logica predicativa con quantificazione su funzioni di ordine arbitrario. Infine la *Mereologia* è una teoria generale delle parti e dell'intero, che intende ridefinire il concetto di insieme, la cui confusa concezione era stata, secondo Leśniewski, l'origine del paradosso di Russell.

Nonostante la loro origine, questi sistemi logici rivestono un interesse che va ben oltre lo scopo fondazionale. Essi rappresentano a tutti gli effetti un modo diverso di fare logica, basato su presupposti differenti rispetto al paradigma di Frege-Russell.

L'origine di queste diversità risiede in una diversa concezione del linguaggio e del suo rapporto con il mondo. Leśniewski professava una forma radicale di nominalismo: è da rifiutare l'esistenza di qualunque oggetto che non sia concreto, individuale, collocato nello spazio e nel tempo. La logica deve formalizzare questa intuizione, nel senso di escludere qualunque termine che faccia riferimento ad entità astratte.

Rispettare questo rifiuto significa sostenere anche un differente punto di vista sullo statuto ontologico dei sistemi logici, i loro simboli ed i loro teoremi. Come sarà chiarito meglio nel proseguo della trattazione, Leśniewski concepiva i sistemi formali sono collezioni materiali di segni grafici, la cui analisi deve avvenire in modo rigidamente costruttivo e puramente estensionale.

[1] B.RUSSELL, A.WHITEHEAD, *Principia Mathematica*, London, Cambridge University Press, 1910.

L'altro principale motivo di interesse dell'opera di Leśniewski è rappresentato dalla rivalutazione della definizione, come principale mezzo espressivo di un sistema formale.

Si tratta di una posizione in contro-tendenza rispetto allo sviluppo storico della logica, dove questa categoria di espressioni aveva subito un progressivo declassamento. Un esempio emblematico è fornito ancora dai *Principia Mathematica* (d'ora in avanti "PM") di Russell e Whitehead: le definizioni sono trattate alla stregua di convenzioni meta-teoriche, arbitrarie e blandamente formalizzate.

Nel quadro concettuale disegnato da Leśniewski, la definizione viene riposizionata "all'interno" del sistema logico. I termini definiti non appartengono più al metalinguaggio, ma al linguaggio oggetto, e vanno dunque ad estendere il vocabolario espressivo del sistema. Lo sviluppo del sistema logico viene così legato ad un particolare stadio di derivazione, nel quale sono state espresse un certo numero di definizioni. Il loro ruolo sintattico è quello di teoremi, la cui introduzione è governata da una regola di inferenza, alla stregua delle classiche sostituzione uniforme e *Modus ponens*.

Letti in questa ottica, i sistemi di *Prototetica* ed *Ontologia* vengono a formare una vera e propria "teoria della definizione", sviluppata su criteri esclusivamente estensionali, libera da presupposizioni esistenziali, basata su presupposti nominalisti.

2 Presupposti filosofici del contributo di Leśniewski

La formazione di Leśniewski fu filosofica, ed egli si occupó dei fondamenti della Matematica dichiaratamente come "apostata della filosofia".

Il suo avvicinamento alla logica fu determinato da un interesse mai sopito per i problemi della tradizione aristotelica e medievale. Lo stesso sistema dell'*Ontologia* viene definito da Leśniewski come un certo tipo di "logica tradizionale modernizzata"[2]. La sua formalizzazione intende catturare il frammento linguistico con il quale formuliamo asserzioni sugli oggetti del mondo e la loro esistenza. Nell'*Ontologia*, deve essere possibile innanzitutto indagare per via logica le dispute ontologiche, proprie della filosofia di discendenza aristotelica: il dibattito sugli universali, lo statuto delle proprietà ed i concetti.

2.1 Inscrizionalismo

Nella visione di Leśniewski una teoria logica si deve articolare senza alcuna presupposizione esistenziale, nè riferimento ad entità astratte. Questa forma di nominalismo riguarda in primo luogo lo *status* ontologico dei sistemi logici stessi, considerati nella loro interezza. Essi non sono altro che collezioni di segni grafici, presenti in numero finito su un qualche supporto fisico. L'esistenza di un sistema logico è dipendente e riducibile alla sua presenza materiale come inchiostro su un foglio, oppure gesso su una lavagna.

Questa posizione, ribattezzata da P. Simons "inscrizionalismo"[3], si discosta in modo netto dalla tradizione logica contemporanea a Leśniewski. E' molto raro trovare

[2]«The theory I call ontology, which forms a certain kind of modernized "traditional logic"», S.LEŚNIEWSKI, *On the foundations of mathematics*, orig. 1927-31, trad. D.I.Barnett, in *Stanislaw Leśniewski Collected Works*, a cura di S.J.Surma, J.T.J.Srzednicki, D.I.Barnett and V.F. Rickey. 2 voll., Dordrecht/Warszawa/Kluwer, Polish Scientific Publishers, 1992, p. 176.

[3]cfr. P.SIMONS, Voce "Stanislaw Leśniewski", Stanford Encyclopedia of Philosophy, url: http://plato.stanford.edu/entries/Leśniewski/, 2007.

autori che si preoccupino con analoga sensibilità di specificare se le loro trattazioni facciano riferimento ai sistemi logici in quanto sistemi di segni, oppure come correlati astratti di questi. A questo proposito, possiamo desumere l'atteggiamento prevalente dalle consuetudini linguistiche: ad esempio il riferirsi ad un sistema logico, tramite l'uso dell'articolo determinativo.

Quando intendiamo riferirci alla teoria di Russell e Whitehead, usiamo l'espressione "IL sistema logico dei *Principia Mathematica*". Ma quali intuizioni abbiamo intorno all'esistenza di un oggetto che corrisponda a questo appellativo? Possiamo fornire una risposta considerando il caso di due persone, che scrivono differenti derivazioni del sistema dei PM su due lavagne distinte.

Probabilmente, non ci verrebbe mai in mente di asserire che stanno scrivendo all'interno di due sistemi logici *differenti*. Perciò, siamo portati a considerare ciò che stanno scrivendo come *istanze materiali* dello stesso sistema, concepito dunque come una realtá astratta ed ipostatizzata. Se accettiamo i presupposti di questo esempio, dobbiamo convenire che si tende ad utilizzare riferimenti linguistici per i sistemi logici, come se questi fossero entità autonome ed astratte.

Al contrario, Leśniewski espone i propri sistemi formali con un linguaggio molto controllato, facendo attenzione a rispettare la concezione inscrizionale sopra presentata. A rigore, è scorretto riferirsi ad "IL sistema dell'*Ontologia*". Tutto ciò di cui possiamo parlare è UN particolare sistema dell'*Ontologia*, derivato qui ed ora su una lavagna.

Questo implica che non esiste alcuna infinità attuale di teoremi logici, ma solo i teoremi, in numero *finito*, che fino a questo momento abbiamo derivato a partire dagli assiomi.

Poniamo però il caso di diverse lavagne, sulle quali abbiamo iniziato differenti sistemi di *Ontologia*. Che cosa accomuna questi sistemi di segni? Solo un corpus di regole, chiamate "spiegazioni terminologiche" e "direttive", che determinano le restrizioni a cui viene sottoposto lo sviluppo formale di una possibile *Ontologia*.

Nei suoi scritti, Leśniewski non stila alcuna definizione induttiva dell'insieme infinito delle formule ben formate; specifica invece quali possibili forme può avere una nuova tesi che scegliamo di inscrivere ad un certo stadio di derivazione, nel sistema che stiamo sviluppando in un dato momento[4].

Questa caratterizzazione si articola in due fasi. In via preliminare, le "spiegazioni terminologiche", scritte in un metalinguaggio semi-formalizzato, formano un vocabolario di termini tecnici - ad esempio "espressione", "parentesi", "omomorfo', "ultima parola in", "successore di" - con i quali riferirsi alla forma grafica estensionale delle "inscrizioni". Di questa terminologia fa uso il metalinguaggio delle "direttive"; in termini puramente sintattici ed estensionali, esse prescrivono le possibili forme di una nuova espressione B, che può essere aggiunta come tesi del sistema relativamente ad una tesi A, ultimo teorema attualmente inscritto nella nostra *Ontologia*.

Dunque uno sviluppo di *Ontologia* è analogo ad una partita a scacchi. C'è una sequenza di mosse (stadi di sviluppo), le quali differiscono da quelle di un'altra partita, giocata in un altro momento su una altra scacchiera. Ciò che accomuna tutte le partite sono le regole del gioco, espresse sotto forma di *direttive*, la cui terminologia è illustrata dalle *spiegazioni*.

[4]Le direttive relative a *Prototetica* ed *Ontologia* si trovano in S.LEŚNIEWSKI, *Fundamentals of a new system of the foundations of mathematics* e *On the foundations of Ontology*, in *Stanislaw Leśniewski Collected Works* cit., pp.410-492 e pp. 606-628.

La concezione inscrizionale della logica si riflette anche sulle singole parti del sistema stesso. Un segno *x*, in una data formula, ed un secondo segno *x*, in una formula differente, non sono occorrenze materiali di una medesima entità astratta - tra di essi non vige alcuna relazione che ne pre-determini una "identitá di significato".

La loro interpretazione semantica ed il loro ruolo sintattico vengono stabiliti su un piano puramente estensionale, in virtù di tratti esteriori, quali l'equiformità grafica, ed il contesto nel quale sono inseriti. Lo stesso Leśniewski espone i propri sistemi logici riferendosi ai termini come oggetti concreti e spazio-temporalmente situati, mai come entità in astrazione rispetto alle proprie istanze contestuali. Per usare la terminologia di Peirce: le parti delle espressioni logiche sono sempre concepite come *tokens*, mai come *types*.

In sintonia con tale atteggiamento, Leśniewski non pone alcuna convenzione sulla forma tipografica dei segni logici. Essi infatti sono sempre analizzati in virtù delle informazioni fornite dal contesto; il carattere tipografico scelto non è portatore di alcun ulteriore attributo "intensionale". Per contrasto, si prenda ad esempio il seguente passo di Russell:

> We will adopt the following conventions. Variables of the lowest type occurring in any context will be denoted by small Latin letters [...]; a predicative function of an argument x [...] will be denoted by ϕ!x (where ψ, χ, θ, f, g, F, or G may replace ϕ)[5].

In coerenza con l'inscrizionalismo sopra illustrato, nessuna di queste convenzioni tipografiche è richiesta nei sistemi logici di Leśniewski.

2.2 Categorie semantiche

Se i segni grafici non hanno alcuna "proprietà", in virtù della loro forma tipografica, si rende necessaria una qualche forma alternativa di regimentazione del linguaggio logico, che sia però coerente all'inscrizionalismo sopra presentato.

A questo proposito Leśniewski propone la teoria delle categorie semantiche. Si tratta di una gerarchia di generi grammaticali, che si ispira alla sintassi delle lingue naturali, ma svolge un ruolo analogo alla teoria dei tipi semplici di Russell.

In relazione ad un certo stadio di sviluppo del sistema logico, possiamo definire una categoria semantica come l'insieme dei segni linguistici attualmente inscritti, i quali possono essere inter-sostituiti in qualunque contesto estensionale preservando la sensatezza degli enunciati.

La gerarchia delle categorie semantiche viene costruita su due categorie primitive. La prima, quella delle "proposizioni" (*sentences*, abb. S), viene introdotta dalla base assiomatica della *Prototetica*. La seconda, quella dei "nomi" (*nouns*, abb. N), viene ad aggiungersi al passaggio all'*Ontologia*.

A partire da "nomi" e "proposizioni", è possibile introdurre categorie di ordine superiore, dette "funtori" (segni grafici di funzione). La notazione adottata per i funtori ha la sintassi "categoria del valore/categorie degli argomenti". Ad esempio, S/NN è la categoria dei funtori che prendono come argomenti due nomi e restituiscono come valore una proposizione. S/(S/NN) è la categoria dei funtori che prendono come argomento un funtore della categoria appena indicata, e restituiscono come valore una

[5] B.RUSSELL, *Mathematical logic as based on the theory of types*, American Journal of Mathematics, XXX, 1908, 3, pp.240.

proposizione. E' evidente come il procedimento sia iterabile, generando una gerarchia di funtori di complessità crescente.

Da ció discende che il numero e la complessità delle categorie semantiche è potenzialmente un infinito numerabile. Tuttavia, è importante sottolineare che, ad un determinato stadio di avanzamento del sistema logico, le categorie semantiche sono sempre in numero finito. Cosí come non "esiste" l'insieme infinito dei teoremi dell'*Ontologia*, non esiste alcuna attualità infinita di categorie semantiche. Ma come si può allora estendere la collezione di categorie iniziali? Tramite definizione di una costante logica, che sia di una categoria semantica inedita, di cui essa diventa il prima rappresentante.

La definizione ha perciò una triplice valenza. Sul piano sintattico, è una nuova tesi del sistema. Sul piano lessicale, estende la collezione di costanti logiche con un nuovo segno; congiuntamente, sul piano semantico-grammaticale, dalla costante logica è desunta una categoria, che può essere già presente nella collezione o meno. Se è già presente, la costante logica viene legata alla categoria, come una sua "nuova entrata sintattica". Se invece la categoria non è ancora stata utilizzata, essa viene aggiunta a quelle già presenti, relativamente allo stato attuale della derivazione sintattica nel sistema.

Determinare la categoria semantica della nuova costante è un procedimento algoritmico, il cui input è il contesto sintattico dell'espressione entro cui essa si trova. Con una analisi *top-down*, l'albero sintattico viene interpretato categorialmente, in ogni sua ramificazione. La gerarchia tra i rami è data dalla posizione che ogni componente occupa nel contesto dell'espressione. La computazione è finita e termina sempre con un risultato, che ad ogni segno assegna la sua categorie di appartenenza[6].

E' interessante notare che l'assegnazione di categoria può portare ad esiti differenti in contesti differenti, anche se il segno in analisi occorre sempre della stessa forma tipografica. Ad esempio, due segni $\sharp$, a differenti stadi del sistema, potrebbero appartenere a diverse categorie semantiche. L'algoritmo infatti opera su *tokens*, basandosi unicamente sulla loro posizione all'interno dell'espressione. La possibilità di inscrivere segni equiformi, ma di categoria semantica differente, è una notevole caratteristica dei sistemi logici di Leśniewski, non presente nel paradigma logico classico. Questa "ambiguità sistematica", percettiva piuttosto che logica, ricalca il fenomeno della polisemia nelle lingue naturali (vd.§ 5.2).

La scelta di concepire una teoria delle categorie basata sulle parti del discorso ("nomi", "proposizioni") rispecchia la volontà di mantenere l'analisi meta-logica su un piano esclusivamente linguistico. In questo senso, pur condividendone alcuni scopi, le categorie semantiche si distanziano dai tipi logici di Russell. Se le categorie di Leśniewski impongono una stratificazione del linguaggio, la gerarchia di Russell sembra riguardare in ultima analisi il referente oggettuale dei segni logici, come è evidente già a partire dai nomi scelti per i tipi - "individui", "funzioni". Per di più, i segni logici di Russell (in quanto *types*) "nascono" con un tipo già specificato, in virtù della propria forma tipografica. Invece, come già osservato, l'assegnazione categoriale prescinde dalle scelte tipografiche; per questo motivo, non può mai agire su un segno "in isolamento", ma deve servirsi del contesto nel quale il segno è inscritto[7].

---

[6]Il testo di riferimento per vedere nel dettaglio l'algoritmo di assegnazione é: K.AJDUKIEWICZ, *La connessità sintattica*, orig. 1935, trad. A.Bonomi, in *La struttura logica del linguaggio*, Bergamo, Studi Bompiani, 2001, pp.345-372.

[7]Curiosamente, alcuni tratti di questa dicotomia vengono rispecchiati nella tipizzazione delle variabili del λ-calcolo. La tipizzazione di Church fa "nascere" i termini con un tipo, mentre l'assegnazione alla Curry determina il tipo dell'argomento funzionale in base al contesto. Cfr. K.H.BARENDREGT, *Lambda calculi with types*, in *Handbook of Logic in Computer Science*, Oxford, Oxford University Press, 1992.

2.3 Neutralità ontologica

Una ulteriore implicazione del nominalismo di Leśniewski consiste nella liberazione dei suoi sistemi logici da ogni presupposizione esistenziale.

A questo proposito, si consideri l'*Ontologia*. Dalla *Prototetica*, ad un qualsiasi stadio di derivazione, si "passa" all'*Ontologia* grazie all'aggiunta di un unico assioma come tesi iniziale del sistema. Tra i termini dell'assioma c'è un'unica costante funtoriale non-definita, "nuova" rispetto alla *Prototetica*, della forma tipografica ε. Possiamo pensare a questa prima tesi dell'*Ontologia* come la caratterizzazione - l'interpretazione intesa - del significato di ε.

L'assioma verrà presentato nella sezione 5.1.1; nell'economia del discorso attuale, ci soffermiamo invece sulle intuizioni riguardo ε che Leśniewski ritiene di formalizzare mediante l'assioma.

Una formula retta da ε ha la seguente forma:

$$a\varepsilon A \tag{1}$$

Dove la formula nel suo complesso è di categoria S, mentre a e A appartengono alla categoria semantica dei nomi. Dunque ε è un funtore di categoria S/NN.

Come prima intuizione, possiamo pensare a ε come alla forma verbale *è* del nostro linguaggio naturale (*est* latino, *jest* polacco), quando questa svolge il ruolo di copula in una predicazione nominale. Dunque leggeremo la formula come "a è A", in analogia con gli asserti della forma "Socrate è uomo" trattati nella teoria del sillogismo aristotelico.

A differenza del calcolo dei predicati classico, l'*Ontologia* "spezza" il predicato nominale in tre parti, mostrando in questo maggiore affinità con la logica antica.

Linguaggio naturale	**Logica del primo ordine**	***Ontologia***
Socrate è mortale	m(S)	S ε m

Questa scelta concettuale è feconda di conseguenze. In primo luogo, cade l'assimilazione dei predicati ad insiemi di individui.

Piuttosto, i nomi comuni - "mortale", "umano" - sono trattati alla stregua dei nomi propri - "Socrate", "Geronimo". Se la logica predicativa distingue tra costanti (individuali) e predicati mono-argomentali (proprietà), nell'*Ontologia* essi ricadono entrambi nella medesima categoria dei nomi.

I nomi possono dunque essere propri o comuni, a seconda che la loro denotazione sia singolare o plurale. Ma essi possono essere anche vuoti, se non denotano nulla. L'estensione del nome in un dominio di oggetti non modifica in alcun modo la categoria semantica di appartenenza. I nomi non hanno alcuna sotto-categorizzazione: la semantica categoriale prescinde dalla cardinalità dell'universo di discorso, ed in questo senso non impegna ontologicamente alcun segno ad essere denotante o meno.

D'altro canto, la possibilità di nomi con estensione vuota rappresenta un altro aspetto peculiare della logica di Leśniewski. Se il sistema dei PM fa discendere la significanza dall'avere una denotazione, questa presupposizione cade nell'*Ontologia*.

E' proprietà peculiare di ogni teorema dell'*Ontologia* di rimanere vero nel suo complesso, qualunque estensione venga assegnata ai nomi che vi compaiono. Si noti che questo vale anche nel caso che ciascun nome sia considerato vuoto, e dunque ogni sottoformula $a\varepsilon A$ sia falsa.

Pertanto le tesi dell'*Ontologia* sono tautologiche in senso profondo - la sensatezza di una espressione non deriva dall'avere i suoi termini o meno una denotazione, ma esclusivamente dai requisiti di buona formazione categoriale prescritti dalle *direttive* (cfr. § 4).

Questo importante fatto discende dal ruolo di ε all'interno del sistema logico.

Ad un primo approccio, si puó dire che le condizioni di verità di una espressione come (1) dipendono dal soddisfacimento di certe presupposizioni di esistenza, riguardo gli argomenti di ε.

Nel sistema dell'*Ontologia*, la suddetta espressione risulta vera[8] solo se le estensioni dei nomi a e A soddisfano i seguenti requisiti:

1. a è un nome che ha come estensione un individuo.
2. A è un nome che ha come estensione un individuo oppure piú individui.
3. Ciò che è nominato da a ricade anche nell'estensione di ciò che è nominato da A.

Queste condizioni costituiscono una "definizione d'uso" del funtore ε, la cui resa formale è affidata all'assioma dell'*Ontologia*.

Ancora sul tema delle presupposizioni di esistenza, è interessante osservare che nell'*Ontologia* non sia mai possibile derivare, in isolamento, alcun teorema di questa sorta:

$$(\exists a)(a \varepsilon a) \tag{2}$$

L'espressione è vera se "a è a"; dunque, per la prima condizione sopra enunciata, a deve essere il nome di un individuo. Se (2) fosse un teorema, la sua verità presupporrebbe un dominio non-vuoto.

Poiché nessuna espressione del genere è un teorema, risulta che dall'utilizzo in una espressione del funtore ε non è mai possibile inferire logicamente l'esistenza di qualsiasi oggetto. Giacché si tratta dell'unico funtore primitivo con presupposizioni di esistenza, ne consegue la neutralità ontologica dell'*Ontologia*.

Una chiarificazione ulteriore di questo importante caratteristica richiede l'introduzione di ulteriori mezzi formali, ed è posticipata al proseguo della trattazione (cfr. § 4.2.1).

In merito alle questioni sollevate, è lecito chiedersi quale ruolo abbiano i quantificatori nel determinare le presupposizioni esistenziali di un sistema logico di Leśniewski. La risposta dell'autore è che non ne hanno alcuno: infatti il valore delle variabili vincolate non è un oggetto, bensì un'espressione linguistica. Per esempio, si consideri ancora la formula precedente:

$$(\exists a)(a \varepsilon a) \tag{3}$$

Il quantificatore non intende asserire l'esistenza di un oggetto di nome a. Invece, specifica che quanto segue nel suo ambito riguarda almeno un rappresentante della categoria semantica dei "nomi". Quindi una lettura corretta per l'espressione è: per almeno un

[8] E' bene ricordare che Leśniewski non fornisce alcuna nozione formalizzata di verità per i propri sistemi logici. Egli riteneva "intuitivamente veri" gli enunciati dell'*Ontologia* nella misura in cui tale sistema era costruito in accordo con le proprie posizioni filosofiche. Tutti i tentativi di fornire le sue teorie di una semantica modellistica sono posteriori. Per una loro disamina cfr. R.URBANIAK, *Leśniewski Systems of Logic and Mereology; History and Re-evaluation*, Dissertazione di dottorato, University of Calgary, 2008.

rappresentante della categoria semantica di cui fa parte *a* in questo contesto (N), esso è due volte argomento di un funtore ε.

In base a questa interpretazione della quantificazione nell'*Ontologia*, risulta inadeguata l'applicazione del noto criterio di Quine:

> In general, entities of a given sort are assumed by a theory if and only if some of them must be counted among the values of the variables in order that the statements affirmed in the theory be true[9]

Poichè Leśniewski non pone restrizioni (di categoria semantica) al valore delle variabili su cui è possibile quantificare, seguire Quine significherebbe ammettere che l'*Ontologia* è di gran lunga il sistema logico più compromesso esistenzialmente tra tutti quelli in circolazione. Ma a differenza di Quine, i valori delle variabili per Leśniewski non sono oggetti del dominio, bensí espressioni linguistiche. Un quantificatore vincola un testimone di una certa categoria semantica, il cui ruolo è indicare che quanto segue nell'ambito di quantificazione vale per qualsiasi (o per almeno un) sostituto della stessa categoria. La varietà di categorie semantiche per le quali possiamo esprimere enunciati di carattere generale non porta con sè alcuna presupposizione riguardo l'esistenza di entità astratte[10].

3 Una nuova teoria della definizione

Alla luce delle peculiarità dei sistemi di Leśniewski fino ad ora presentate, una revisione della definizione in logica non è solo plausibile, ma addirittura necessaria.

In primo luogo, senza definizioni l'espressività del sistema è bloccata allo stadio iniziale. Questo dato non è allarmante in un contesto classico, dove si presuppone fin dal principio un sistema astratto, già composto da un dizionario di simboli infinito e un insieme anch'esso infinito di teoremi. Ma in un contesto inscrizionale, dove il dizionario e il numero di teoremi dimostrati sono sempre attualmente in numero finito, è necessario pensare un qualche meccanismo che consenta al sistema di implementare l'infinito potenziale, di modo che la sua capacità espressiva possa risultare soddisfacente. Questo meccanismo è la definizione: essa introduce nuovi simboli, nuove categorie semantiche, e nuove tesi al sistema. Anche se che questi tre insiemi sono sempre finiti relativamente ad un certo stadio di derivazione, essi possono essere incrementati in maniera potenzialmente infinita.

Resta da vedere a quale livello, linguistico o meta-linguistico, sia più opportuno posizionarie le definizioni. Come già anticipato, Leśniewski sceglie di fare delle definizioni delle tesi del linguaggio oggetto: esse sono poste dunque "internamente" rispetto al sistema logico. Questa scelta può essere meglio esplicata se le ragioni che la sostengono vengono ricomposte con quanto finora detto, riguardo il carattere progressivo ed inscrizionale dei sistemi logici di Leśniewski.

---

[9] W. V. QUINE, *From a logical point of view*, Harvard, Harvard University Press, 1961, p.103.

[10] L'interpretazione dei quantificatori nei sistemi logici di Leśniewski è ancora oggi oggetto di dibattito, come testimonia anche il recente R.URBANIAK, *Leśniewski Systems of Logic and Mereology; History and Re-evaluation* cit. La tesi da me sostenuta intende essere d'accordo con quanto sostenuto in: D.MIÉVILLE, *Introduction a l'oeuvre de S.Leśniewski, fascicule II: l'Ontologie*, Neuchâtel, CdRS, Université de Neuchâtel, 2004, p.140-142. Per un approfondimento comparativo tra Quine e Leśniewski rispetto all'impegno ontologico, rimando invece a C.LEJEWSKI, *Logic and existence*, British journal of Philosophy of Science, 1954, 5 , pp.104-119

- Si dia il caso che le definizioni possano essere introdotte a livello di meta-teoria. Verrebbe richiesta una meta-meta-teoria, che ponga restrizioni a ciò che possiamo definire, pena l'insorgere di contraddizioni nel sistema-oggetto. Inserire le definizioni a livello della teoria, invece, consente di armonizzare le direttive che ne regolano l'introduzione con le altre che già determinano la sintassi logica del sistema. La specifica di direttive apposite per le definizioni permette a Leśniewski di esplicitare a quali condizioni la loro introduzione preservi la consistenza del sistema.

- Il fatto che le categorie semantiche primitive e i funtori inizialmente inscritti siano così esigui indica la volontà di non caricare il sistema logico di troppe premesse meta-linguistiche, arbitrarie e vincolanti. Il fatto che le definizioni siano interne mette colui che sviluppa il sistema inscrizionale nella possibilità di sviluppare un sistema realmente unico e peculiare, tramite l'introduzione delle definizioni che più preferisce. Per questo, due sistemi di *Ontologia* possono divergere in modo consistente l'uno dall'altro, perchè le definizioni ne hanno modificato il dizionario di simboli e le categorie semantiche a disposizione. La presenza di definizioni fortifica dunque il carattere inscrizionale del sistema logico nel suo complesso. Il fatto che esse siano interne esplicita le scelte dell'autore, portandole da un contesto informale e pre-teorico ad uno formale e regimentato.

3.1 Definizioni esterne

D'altro canto, si considerino, per contrasto, i PM. Le definizioni vengono trattate per soli due paragrafi, nell'introduzione del primo dei tre volumi redatti da Russell e Whitehead[11]. La loro sintassi ed il loro significato non ricevono una chiarificazione precisa e sistematica, ma vengono lasciati all'intuizione extra-formale del lettore. Questa omissione è una precisa scelta concettuale, esplicitata dallo stesso Russell:

> [Definitions] are, strictly speaking, mere typographical conveniences. [...] Theoretically, all definitions are superfluous.[12]

Per l'autore, le definizioni non sono altro che comodità di scrittura, regole di abbreviazione meta-linguistiche che non influiscono in alcun modo sulle capacità espressive del sistema formale. Per esempio, la definizione dell'implicazione è espressa in un non meglio precisato meta-linguaggio, di cui fa parte il segno $=_{def}$:

$$\alpha \to \beta =_{def} \neg\alpha \vee \beta \tag{4}$$

Si tratta di una definizione esterna al sistema logico, in quanto non introduce alcun nuovo simbolo nel linguaggio oggetto. Infatti, un'espressione contenete $\to$ non è propriamente una formula ben formata del sistema, ma solo una conveniente abbreviazione dell'espressione con i primitivi $\neg$ e $\vee$.

3.2 Dalle definizioni esterne alle definizioni interne

A differenza di Russell, Leśniewski inserisce le definizioni in un contesto teorico. Si pone dunque il problema di interpretare nel linguaggio oggetto il simbolo di definizione $=_{def}$.

[11] B.RUSSELL, A.WHITEHEAD, *Principia Mathematica* cit.
[12] *ivi*, I, p.11.

La scelta di Leśniewski non consiste nel proporre un nuovo segno, con caratteristiche speciali, ma di assegnare un nuovo ruolo alla doppia implicazione proposizionale $\equiv$ (scritta anche come $\Longleftrightarrow$). Le ragioni risiedono nel fatto che questo connettivo, già presente nel calcolo proposizionale classico, possiede due "buone" proprietà.

- Dal punto di vista delle categorie semantiche, è plausibile assegnare ad $\equiv$ la categoria S/SS. Infatti prende come argomenti due proposizioni, e ne restituisce una come valore.
- Un enunciato che abbia $\equiv$ come connettivo principale risulta vero nel caso in cui le due sotto-formule a cui si applica condividano lo stesso valore di verità.

Per quanto riguarda il primo punto, è importante focalizzare il problema a cui pone soluzione: se le definizioni vengono riposizionate all'interno del sistema logico, si pone la questione della loro buona formazione sintattica. A questo proposito, rispetta le nostre intuizioni il fatto che le tesi di un sistema formale appartengano alla categoria semantica delle preposizioni. Se accettiamo questo, diviene condizione necessaria che le definizioni, per essere tesi del sistema, abbiano indice categoriale S. Un'espressione con $\equiv$ come funtore principale soddisfa questa condizione.

Affrontato questa prima questione, resta da vedere come le definizioni possano essere tautologie. Nell'ottica di Russell, il problema non sussiste: parlare di verità o falsità di una definizione non ha senso, in quanto si tratta di una convenzione, stipulata arbitrariamente. La definizione per come la intende Leśniewski invece è quella che un aristotelico chiamerebbe *definitio quid rei*[13]: la determinazione di qualcosa nella sua essenza, per genere e differenza. Definire significa dunque porre in relazione un *definiendum* con il suo *definiens*: a differenza del caso russelliano, si pone il problema dell'adeguatezza di questo accostamento.

Leśniewski formalizza questa intuizione ponendo il seguente vincolo: la definizione è adeguata se *definiendum* e *definiens* concordano nel valore di verità. Una discordanza sarebbe infatti sintomo di una "inadeguatezza", tra l'oggetto di definizione e quella che reputiamo essere la sua essenza. Secondo questa lettura, diviene chiaro come le condizioni di verità di $\equiv$ lo rendano il candidato più opportuno a interpretare il simbolo di definizione.

Per riassumere, il quadro che si delinea è il seguente: le definizioni sono formule ben formate di indice categoriale S, che esprimono una relazione tra un *Definiens* e un *Definiendum*. Perchè una definizione risulti essere anche una tautologia, le direttive che ne regolano l'introduzione devono porre un qualche genere di vincolo, che leghi il valore di verità di un termine a quello dell'altro.

Per le ragioni fino ad ora analizzate, il funtore $\equiv$ è assunto come unica costante primitiva del sistema della *Prototetica*. Tutte gli altri connettivi del calcolo proposizionale classico - $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ - possono essere definiti in termini di esso[14]. Allo stadio iniziale

[13] ARISTOTELE, *Topici*, VI.

[14] Per quanto riguarda la congiunzione, questo importante risultato è stato ottenuto da Tarski, mentre era allievo di Leśniewski (cfr. LEŚNIEWSKI, *Fundamentals of a New System of the Fundations of Mathematics*, in *Stanislaw Leśniewski Collected Works* cit, p.419):

$$(\forall pq)((p \wedge q) \equiv ((\forall \phi)(p \equiv ((\forall r)(p \equiv \phi(r)) \equiv (\forall r)(q \equiv \phi(r))))))$$

del sistema, risultano presenti dunque due sole categorie semantiche: quella delle proposizioni (S) e quella dei funtori formativi di proposizioni a partire da due proposizioni (S/SS).

4 Direttive per le definizioni nei sistemi logici di Leśniewski

In aggiunta alle questioni già prese in esame, un ulteriore problema si pone nel momento di formulare direttive che regolino l'introduzione delle definizioni nel sistema logico: deve essere interdetta l'aggiunta di definizioni contraddittorie, che minino la consistenza del sistema.

A questo scopo, Leśniewski comincia con l'escludere dal novero delle possibili definizioni quelle "implicite". I requisiti proposti riguarderanno dunque le sole definizioni "esplicite", cioè quelle dove il termine definito non compare nel *definiens*. Ad una prima approssimazione, la classe delle definizioni esplicite "consistenti" si puó caratterizzare così[15]:

1. Esse stabiliscono una relazione d'equivalenza tra un *definiendum* (una formula contenente il termine da definire) e il *definiens* (una formula che ne offre la definizione).
$$Definiendum \Longleftrightarrow Definiens$$

2. Il termine da definire è una costante non equiforme a nessun segno del sistema *della stessa categoria semantica* (data la natura inscrizionale del sistema, l'algoritmo di controllo termina in tempo finito).
$$N(...) \Longleftrightarrow Definiens$$

3. Il *definiens* è una formula ben formata in conseguenza a ciò che è stato precedentemente derivato nel sistema, alle costanti logiche definite ed alle categorie semantiche già introdotte.
$$N(...) \Longleftrightarrow fbf$$

4. Tutte le variabili del *definiens* devono avere un'occorrenza equiforme nel *definiendum*. Non rispettare questa condizione comporta una costruzione potenzialmente contradditoria. Si può imporre anche l'inverso (equiformità delle variabili del *definiendum* nel *definiens*), ma questa ulteriore condizione è di valore puramente estetico.
$$N(v_1, v_2, ..., v_i) \Longleftrightarrow fbf(v_1, v_2, ..., v_i)$$

5. Nessun carattere del definiendum deve essere ripetuto. Una infrazione a questa condizione può portare problemi nell'applicare la sostituzione uniforme.

Resta da vedere come, posti tali requisiti generali, si possa strutturare di conseguenza una procedura di definizione, nell'ambito di uno specifico calcolo logico.

Le direttive originali di Leśniewski sono scritte con meticolosa attenzione a riferirsi ai tratti puramente estensionali dei segni. Ad esempio, anzichè "il funtore ε",

[15]cfr. D.MIÉVILLE, *Introduction a l'oeuvre de S.Leśniewski, fascicule II: l'Ontologie* cit.: secondo il mio parere, il miglior testo introduttivo sulle direttive dell'*Ontologia* di Leśniewski.

Leśniewski usa scrivere "il segno equiforme a quello in quinta posizione nell'assioma dell'*Ontologia*". Per ragioni di semplicità espressiva, enuncerò le direttive prescindendo da tali accorgimenti, che pure sono di importanza fondamentale e dimostrano ancora una volta la coerenza ed il rigore nominalista dell'autore[16].

4.1 Direttiva per le definizioni di tipo proposizionale

I requisiti generali ricevono una prima formalizzazione nella direttiva per la definizione nel sistema della *Prototetica*. Con essa è possibile introdurre costanti di categoria S, o funtori che hanno come valore di uscita S.

1. Siano $v_1, v_2, ..., v_k$ k variabili delle categorie semantiche, rispettivamente, $c_1, c_2, ..., c_k$ (categorie precedentemente introdotte nel sistema).

2. Sia Γ una formula, ben formata rispetto dello stato attuale del sistema, contenente k variabili equiformi ognuna ad una delle variabili $v_1, v_2, ..., v_k$.

3. Allora, l'espressione seguente è una corretta definizione di tipo proposizionale:

$$(\forall v_1, v_2, ..., v_k)(\phi(v_1, v_2, ..., v_k) \equiv \Gamma(v_0, v_1, ..., v_k))$$

   Dove $\Gamma(v_1, v_2, ..., v_k)$ è il *definiens* e $\phi(v_1, v_2, ..., v_k)$ il *definiendum*.

La definizione introduce un nuovo funtore costante ϕ, della categoria semantica dei funtori di valore proposizionale, aventi k argomenti, dove il primo è della categoria c_1, il secondo della categoria c_2,..., l'ultimo della categoria c_k.

Il funtore introdotto sarà dunque un rappresentante della categoria S/$c_1, c_2, ..., c_k$.

4.2 Direttiva per le definizioni di tipo nominale

Nel passaggio all'*Ontologia*, viene aggiunta una direttiva per la definizione di tipo "nominale". Una definizione è così detta quando introduce una costante nominale di categoria N, oppure un funtore con valore in uscita N.

- Siano $v_1, v_2, ..., v_k$ k variabili delle categorie semantiche, rispettivamente, $c_1, c_2, ..., c_k$ (categorie precedentemente introdotte nel sistema).

- Sia γ una formula, ben formata rispetto allo stato attuale del sistema, contenente k variabili equiformi ognuna ad una delle variabili $v_1, v_2, ..., v_k$.

- Allora, l'espressione seguente è una corretta definizione di tipo nominale:

$$(\forall v_1, v_2, ..., v_k)(a \varepsilon \chi(v_1, v_2, ..., v_k) \equiv (a \varepsilon a \wedge \gamma(v_1, v_2, ..., v_k)))$$

  Dove $(a \varepsilon a \wedge \gamma(v_1, v_2, ..., v_k))$ è il *definiens* e $a \varepsilon \chi(v_1, v_2, ..., v_k)$ il *definiendum*.

La definizione introduce un nuovo funtore costante χ, della categoria semantica dei funtori di valore nominale, aventi k argomenti, dove il primo è della categoria c_1, il secondo della categoria c_2,..., l'ultimo della categoria c_k.

Possiamo rappresentare la categoria semantica introdotta come: N/$c_1, c_2, ..., c_k$.

[16]Esistono diverse rivisitazioni delle direttive per la definizione ontologica originariamente presentate da Leśniewski. Ho scelto di seguire in particolare J.S.SLUPECKI, *Leśniewski Calculus of Names*, Studia Logica, IV, 1955, pp.7-70. e D.MIÉVILLE, *Introduction a l'oeuvre de S.Leśniewski, fascicule II: l'Ontologie* cit.

4.2.1 Neutralità ontologica (2)

Si è accennato in precedenza (cfr. § 2.3) al fatto che nessuna espressione del genere

$$(\exists a)(a \varepsilon a) \tag{5}$$

possa essere un teorema dell'*Ontologia*. Ora che è stata introdotta la struttura delle definizioni di tipo nominale, risulta molto più comprensibile il motivo di questa affermazione.

In ogni definizione di costante nominale, una sottoformula $a \varepsilon \phi$ nel *definiendum* è bilanciata da una sottoformula $a \varepsilon a$ nel *definiens*. Tale simmetria ha lo scopo di mantenere qualsiasi asserto esistenziale su un piano meramente *ipotetico*, prescindendo così da presupposizioni di esistenza rispetto agli oggetti nominati.

A riprova di ciò, si consideri ora di assegnare ad a una estensione vuota: la presenza della medesima "condizione di esistenza" in entrambi i termini della definizione li renderà falsi allo stesso tempo. Poichè il funtore principale è $\equiv$, l'enunciato nel suo complesso risulterà comunque vero.

Come già anticipato, questa soluzione tecnica consente di annullare ogni distinzione categoriale tra nomi per individui, nomi comuni (o predicati, o classi) e nomi senza denotazione. Infatti, ogni nome dell'*Ontologia* può essere interpretato intuitivamente nei tre modi differenti, senza formulare alcuna presupposizione di esistenza sull'universo di discorso, che può anche essere vuoto. L'assioma, le definizioni, e ciascuna loro conseguenza logica preservano questa neutralità, in virtù del suddetto bilanciamento delle asserzioni di esistenza.

In virtù di questi accorgimenti formali, è inoltre possibile trattare nell'*Ontologia* nomi che potremmo dire "contraddittori", senza che il sistema ne risulti a sua volta inconsistente. Nello specifico, mi riferisco alla seguente definizione, che introduce una costante per il "nome vuoto" o "nome contraddittorio".

$$(\forall a)(a \varepsilon \bigwedge) \equiv (a \varepsilon a) \land \neg(a \varepsilon a) \tag{6}$$

E' importante notare che senza la clausola di esistenza posta al *definiens*, la suddetta definizione potrebbe essere espressa nel seguente modo:

$$(\forall a)(a \varepsilon \bigwedge) \equiv \neg(a \varepsilon a) \tag{7}$$

Da cui sarebbe derivabile la contraddizione:

$$(\bigwedge \varepsilon \bigwedge) \equiv \neg(\bigwedge \varepsilon \bigwedge) \tag{8}$$

In conclusione, un sistema di *Ontologia* è in grado di esprimere teoremi che coinvolgano asserzioni di esistenza, prescindendo dalla cardinalità e dalla struttura dell'universo di discorso di riferimento. Si tratta perciò di una (forse della prima) "logica libera", in un senso molto forte.

5 Le definizioni come esplicitazione logica di temi filosofici

A partire dalle direttive sopra enunciate, un sistema di *Ontologia* può essere ovviamente sviluppato in molte direzioni differenti. Una strada è quella di definire i numeri naturali e le operazioni dell'aritmetica, andando in direzione di una ricostruzione della teoria dei numeri finitaria[17]. La via che invece ho scelto di seguire in questa introduzione consiste nello sviluppare, per mezzo delle definizioni, alcuni concetti della tradizione filosofica, con particolare riguardo alle tematiche ontologiche di derivazione aristotelico-medievale.

5.1 Gradi di esistenza

5.1.1 L'assioma dell'*Ontologia*

Per quanto si è affermato, nel sistema logico dell'*Ontologia* le asserzioni di esistenza non sono legate alla quantificazione, ma alla relazione dei nomi con il funtore ε. Riprendiamo le condizioni di verità di un'espressione del genere $a\varepsilon A$, analizzando in modo formale quanto detto prima informalmente. Tali condizioni sono espresse nell'unico assioma dell'*Ontologia*, che ha la forma di una definizione del funtore ε.

$$\begin{aligned}&(\forall Ab)((A\,\varepsilon\, b) \equiv ((\exists B)(B\varepsilon A) \wedge (\forall DC)(((D\varepsilon A) \wedge \\ &\quad (C\varepsilon A)) \rightarrow (D\varepsilon C) \wedge (\forall D)((D\varepsilon A) \rightarrow (D\varepsilon b))))\end{aligned} \tag{9}$$

La definizione è implicita, perchè il funtore compare sia nel *definiens* che nel *definiendum*. Perció, per quanto detto prima, se non fosse un assioma, questa espressione non potrebbe essere una tesi valida del sistema logico.

Il *definiens* è composto di tre congiunti: si tratta delle condizioni che l'espressione $(A\,\varepsilon\, b)$ deve soddisfare per essere vera.

$$(\forall Ab)((A\,\varepsilon\, b) \equiv ((\exists B)(B\varepsilon A)...$$

La prima condizione è che ci sia almeno un nome che nomini l'oggetto chiamato A. In altri termini, A non può avere estensione nulla, dunque deve essere nome di almeno un individuo.

$$... \wedge (\forall DC)(((D\varepsilon A) \wedge (C\varepsilon A)) \rightarrow (D\varepsilon C)$$

La seconda condizione esprime il fatto che due nomi qualsiasi, la cui estensione sia inclusa in A, hanno la medesima estensione. Dunque l'estensione di A non può essere maggiore di un individuo. Unendo le prime due condizioni, otteniamo che il nome A deve avere come *estensione* almeno e al massimo un individuo.

$$... \wedge (\forall D)((D\varepsilon A) \rightarrow (D\varepsilon b))$$

L'ultimo segmento esprime la condizione che *tutto* A sia anche b. Infatti, ogni nome D che sia A è anche b. Riprendendo le tre condizioni: $A\,\varepsilon\, b$ se e solo se A è un nome proprio, b è un nome proprio oppure un nome comune, e tutto ció che ha nome A ha anche nome b.

[17] Si veda ad esempio la prima parte di: J.T.CANTY, *Leśniewski Ontology and Gödel Incompleteness Theorem*, Dissertazione di dottorato, University of Notre Dame, 1967.

5.1.2 Funtori di esistenza

Sulla base delle condizioni espresse dall'assioma, è possibile servirsi di ε per definire dei funtori di esistenza alternativi, che ne riprendano solo alcune condizioni di verità. Secondo questo sviluppo, l'*Ontologia* può esprimere una molteplicità di sfumature, veri e propri "gradi di esistenza", non riproducibili in un contesto di logica dei predicati.

Primo funtore di esistenza

$$(\forall a)((ex_1(a)) \equiv (\exists b)(b \varepsilon a)) \tag{10}$$

L'estensione di a è non vuota: il funtore ex_1 riprende la prima sotto condizione dell'assioma.

Secondo funtore di esistenza

$$(\forall a)((ex_2(a)) \equiv (\forall bc)((b \varepsilon a) \wedge (c \varepsilon a) \rightarrow (b \varepsilon c))) \tag{11}$$

Leggiamo $ex_2(a)$ come: "esiste al massimo un a". Si noti come questo grado di esistenza sia più debole del precedente: a "esiste" in questo secondo senso anche se la sua estensione è vuota (ad esempio, $ex_2(Pegaso)$).

Terzo funtore di esistenza

$$(\forall a)((ex_3(a)) \equiv (\exists b)(a \varepsilon b)) \tag{12}$$

$ex_3(a)$ rispecchia la denotazione delle costanti individuali della logica classica. Infatti, trovandosi a alla sinistra di ε nel *definiens*, la condizione espressa è che la sua estensione sia esattamente un individuo[18].

5.2 Negazione, polisemia e gerarchia di funtori

Allo stesso modo dell'esistenza, possiamo sviluppare nell'*Ontologia* una vera e propria "teoria della negazione", proposizionale e nominale, che si avvalga della flessibilità concessa dalla teoria delle categorie semantiche. Per cominciare, è possibile introdurre almeno due diversi funtori per la negazione. Il primo è della categoria S/S.

$$(\forall a)(\neg(a) \equiv (a \equiv (\forall b)(b))) \tag{13}$$

Il secondo è della categoria S/SS.

$$(\forall a)(\neg(ab) \equiv \neg(a \equiv b)) \tag{14}$$

É molto significativa la possibilità di usare lo stesso segno grafico $\neg$, per definire (e poi utilizzare) due funtori diversi. Si intende con questo accorgimento esprimere il fatto che si tratti di funtori dalle caratteristiche affini, portatori di differenti sfumature di significato. Questa polisemia, come già accennato, è un fenomeno frequente nelle lingue naturali, riproducibile solo con difficoltà nei calcoli logici classici. Queste difficoltà

[18] Allo stesso modo dei funtori di esistenza esaminati, è possibile inscrivere nell'*Ontologia* diversi funtori di inclusione e funtori di identità tra estensioni nominali. Per una esposizione panoramica di queste definizioni rimando in particolare a C.LEJEWSKI, *On Leśniewski's Ontology*, Ratio, 1958, 1, pp.150-176.

trovano una risposta soddisfacente nei sistemi di Leśniewski, in virtù della differente teoria dei tipi (categorie) su cui essi si fondano.

Ricordiamo infatti che, a differenza dei tipi logici di Russell, le categorie sono assegnate ai segni in base al "contesto" nel quale essi si trovano: il "numero" e la "categoria" degli argomenti di un funtore appartengono proprio a questo genere di informazioni contestuali. Nel nostro caso, la prima negazione ha un solo argomento (S), la seconda due (SS). Pertanto, l'algoritmo di assegnazione categoriale può determinare univocamente, in ogni situazione, quale dei due funtori sia coinvolto nell'espressione in analisi.

Fatta questa premessa sulla polisemia, vediamo come nell'*Ontologia* sia possibile riproporre la distinzione Aristotelica tra "negazione proposizionale" e "negazione nominale"[19]. I funtori definiti poc'anzi sono negazioni proposizionali; è possibile invece servirsi della direttiva di definizione di tipo nominale, per introdurre la seguente tesi dell'*Ontologia*:

$$(\forall Ab)((A\,\varepsilon\,\neg < b >) \equiv ((A\,\varepsilon\,A) \wedge \neg(A\,\varepsilon\,b)) \tag{15}$$

La definizione riguarda il funtore $\neg$ di categoria N/N. Abbiamo associato ad esso un contesto di parentesi inedito <->, per disambiguare rispetto al contesto di parentesi *(-)*, il quale riguarda argomenti proposizionali.

Si rende necessario, a questo proposito, chiarire quest'altra peculiarità dei sistemi logici di Leśniewski. In un contesto completamente estensionale, avere cura della forma grafica delle parentesi diventa di fondamentale importanza, al fine di disambiguare le situazioni di funtori equiformi, i quali condividono anche il numero di argomenti. Questa complicazione ulteriore non si rivela poi tale, se prendiamo l'abitudine di considerare un funtore non solo come il segno grafico di funzione, ma anche come il contesto grafico di parentesi ad esso associato. Ad esempio, scritto in notazione rigorosa, il primo funtore dell'Ontologia, di categoria S/NN, sarebbe $\varepsilon\{--\}$. La forma delle parentesi diventa un ulteriore input contestuale, necessario all'algoritmo di assegnazione per determinare correttamente la categoria semantica di una data espressione. Nel corso della trattazione, si è scelto di semplificare questo aspetto dove non strettamente richiesto, al fine di preservare la leggibilità delle formule e non introdurre una quantità eccessiva di nuove nozioni.

A questo punto, abbiamo fornito una negazione nominale e due negazioni proposizionali. La distinzione tra di esse ha una certa rilevanza filosofica. Si pensi, ad esempio, all'espressione:

$$Il\ Re\ di\ Francia\ e'\ calvo \tag{16}$$

Confrontiamo le differenti formalizzazioni che il calcolo dei predicati e l'*Ontologia* offrono di questo enunciato. La possibilità di definire una gamma di funtori di negazione si traduce, in questo caso, in una capacità maggiore di catturare le sfumature di significato del linguaggio naturale.

Linguaggio naturale	**Logica del primo ordine**	***Ontologia***
Il Re di Francia è calvo	c(R)	R ε c
Il Re di Francia non è calvo	¬ c(R)	¬ (R ε c)
Il Re di Francia è non calvo	?	R ε ¬<c>

[19] ARISTOTELE, *De Interpretazione*, X.

Inoltre, a partire delle definizioni precedenti, è possibile derivare come teoremi due differenti versioni del principio del terzo escluso:

$$(\forall ab)((a \varepsilon b) \vee (a \varepsilon \neg < b >)) \tag{17}$$

$$(\forall ab)((a \varepsilon b) \vee (\neg(a \varepsilon b))) \tag{18}$$

Infine, osserviamo come sia possibile sviluppare ulteriormente la nostra teoria della negazione, in direzione di funtori di ordine superiore:

$$(\forall \xi)(\neg/\xi\backslash \equiv (\forall ab)(\xi\{a\,b\} \equiv (\forall c)(c))) \tag{19}$$

La categoria semantica qui introdotta è S/(S/NN). Poichè si tratta di una categoria nuova, nell'introdurre la definizione abbiamo scelto un nuovo contesto grafico di parentesi: $/-\backslash$. Così, non insorge alcuna ambiguità nei confronti delle categorie S/S e N/N, associate rispettivamente a contesti di parentesi *(-)* e <->.

Questa negazione non riguarda argomenti proposizionali, ma argomenti funtoriali di categoria S/NN. In questo senso, si tratta di una negazione di ordine superiore, rispetto a quelle definite in precedenza, come attesta anche la quantificazione su ξ, testimone della categoria S/NN.

6 Definizioni creative

Nei paragrafi precedenti, si sono illustrate alcune interessanti conseguenze della collocazione di definizioni esplicite entro i confini del sistema logico stesso. In particolare, si è evidenziato il fatto che l'evoluzione del sistema logico diventa relativa ad un certo stadio di derivazione. Infatti, una nuova definizione può introdurre una nuova categoria semantica, attraverso l'introduzione di una nuova costante logica che la rappresenti. Giacchè si è sostenuto che l'*Ontologia* quantifica rispetto a (rappresentanti di) categorie semantiche, potrebbe essere molto interessanti chiedersi se i teoremi dimostrabili aumentino in seguito all'introduzione di definizione.

Per quanto concerne l'*Ontologia*, la risposta è affermativa: l'introduzione di certe definizioni, dette "creative", consente di derivare teoremi che non erano dimostrabili negli stadi precedenti del sistema logico in divenire. La capacità deduttiva dell'*Ontologia* ne risulta dunque modificata in un senso molto forte. In questa ottica, le definizioni acquistano un valore teorico ed euristico ancora maggiore, in quanto il loro inserimento può variare *in itenere* le caratteristiche del sistema logico stesso, aprendo uno scarto qualitativo, e non solo quantitativo, tra stadi differenti del suo sviluppo.

Per illustrare questa peculiarità dell'*Ontologia*, è opportuno innanzitutto delineare meglio i contorni dell'oggetto di discussione.

Diciamo che le definizioni di un sistema dato soddisfano la condizione di non-creatività se:

> per ogni tesi ϕ, non contenente un dato termine a introdotto per definizione, se ϕ segue dalla definizione α di a ed un insieme Γ di tesi del sistema, essa segue anche dal solo Γ.

Ovvero:

$$Se\ \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \phi\ , allora\ \Gamma \vdash \phi$$

Teorema Le definizioni dell'*Ontologia* non soddisfano la condizione di non-creatività[20].

Idea della dimostrazione Esibiamo un testimone di definizione creativa: la definizione del prodotto di nomi:

$$(\forall abc)(a \varepsilon \Pi(b,c) \equiv (a \varepsilon a \wedge (a \varepsilon b \wedge a \varepsilon c))) \tag{20}$$

A partire da essa è possibile derivare immediatamente la seguente tesi:

$$(\forall bc)(\exists d)(\forall a)((a \varepsilon d) \equiv (a \varepsilon a \wedge (a \varepsilon b \wedge a \varepsilon c))) \tag{21}$$

Per dimostrare che la definizione (20) è creativa, proviamo l'indipendenza della sua conseguenza logica (21) dall'assioma dell'*Ontologia*. Per fare ciò, ci serviamo della *Prototetica* come di un "modello interno" dell'*Ontologia*. Introduciamo una funzione di interpretazione *, che valuta tesi dell'*Ontologia* sulla *Prototetica* nel seguente modo:

- Le variabili e le costanti nominali diventano variabili e costanti proposizionali.
- Il funtore ε (categoria S/NN) diventa il funtore ≡ (categoria S/SS).
- Sottoposte a conversione *, le regole di inferenza dell'*Ontologia* diventano regole di inferenza primitive o derivate della *Prototetica*.

Sotto l'interpretazione *, (21) diventa:

$$(\forall bc)(\exists d)(\forall a)((a \equiv d) \equiv (a \equiv a \wedge (a \equiv b \wedge a \equiv c))) \tag{22}$$

(22) non è un teorema della *Prototetica*. Per il risultato di completezza[21], ¬(22) è un teorema della *Prototetica*.

Sotto l'interpretazione *, l'assioma dell'*Ontologia* (abbreviato *AX-ONT*) diventa:

$$\begin{aligned}(\forall Ab)((A \equiv b) \equiv ((\exists B)(B \equiv A) \wedge (\forall DC)(((D \equiv A) \wedge \\ (C \equiv A)) \rightarrow (D \equiv C) \wedge (\forall D)((D \equiv A) \rightarrow (D \equiv b))))\end{aligned} \tag{23}$$

(23) è un teorema della *Prototetica*.

Dunque si presenta la seguente situazione:

$$\begin{gathered}\vdash_{ONT} AX-ONT \ e \ \vdash_{ONT} \ (21) \\ \vdash_{PROT} AX-ONT^* \ ma \ \vdash_{PROT} \ \neg(21^*)\end{gathered}$$

Poichè *Prototetica* ed *Ontologia* sono consistenti[22], ne consegue che la definizione del prodotto di nomi (20) è creativa.

[20]Una dimostrazione completa è presentata in J.S.SLUPECKI, *Leśniewski Calculus of Names* cit., IV, §1, teorema VII. Ho scelto di riprendere, con leggere variazioni, una seconda dimostrazione, proposta da B.IWANUS, *On Leśniewski s elementary Ontology*, XXXII, Studia Logica, 1973, 31, pp.7-72 e D.MIÉVILLE, *Introduction a l'oeuvre de S.Leśniewski, fascicule II: l'Ontologie* cit., pp.143-144, omettendo la prova di alcuni lemmi.

[21]cfr. B.SOBOCINSKI, *On the Single Axioms of Protothetic*, I/II, Notre Dame Journal of Philosophy, 1960, pp.52-73; pp.111-126 e 129-148.; J.S.SLUPECKI, *Leśniewski Protothetics*, Studia Logica, I, 1953, pp.44-111.

[22]Una dimostrazione di questo si trova in J.S.SLUPECKI, *Leśniewski Protothetics* cit. e J.S.SLUPECKI, *Leśniewski Calculus of Names* cit., IV, §1, teorema VIII.

6.1 Eliminare le definizioni creative?

Iwanus[23] elimina la forza espansiva delle definizioni creative dall'*Ontologia*, allargando la sua base assiomatica (si noti che la prima espressione è equivalente a (21)):

$$(\forall bc)(\exists d)(\forall a)((a\varepsilon d) \equiv (a\varepsilon b \wedge a\varepsilon c)) \tag{24}$$

$$(\forall a)(\exists b)(\forall c)(c\varepsilon b \equiv (c\varepsilon c \wedge \neg(c\varepsilon a))) \tag{25}$$

Le due espressioni, congiuntamente all'assioma già presente, forniscono l'*Ontologia* di una base assiomatica che interdisce qualsiasi scarto qualitativo nel sistema. In virtù di questa riduzione, Iwanus dimostra l'equivalenza del nuovo sistema, detto *Ontologia elementare*, con una algebra di Boole atomica, se essa viene arricchita di due definizioni. Infine, fornisce una semantica modellistica per il sistema, e prova un risultato di decidibilità per una estensione dell'*Ontologia elementare*.

I risultati dell'indagine di Iwanus mostrano come un sistema non-creativo sia più facilmente caratterizzabile con teoremi meta-logici, nonchè più adatto ad essere trattato secondo una semantica modellistica.

Tuttavia, a mio avviso, la "elementarizzazione" dell'*Ontologia* è un processo di snaturamento, poichè elimina la proprietà più interessante ed originale del sistema originario di Leśniewski. Tanto più che, a partire da ciò, Iwanus procede ad una assimilazione dell'*Ontologia* a procedimenti e caratterizzazioni proprie di un paradigma logico classico, che probabilmente lo stesso Leśniewski avrebbe criticato come "platonisti".

In verità, tra i prosecutori dell'opera di Leśniewski, Iwanus non è affatto in minoranza. Una parte consistente della letteratura su questo autore consiste in tentativi di fornire l'*Ontologia* (e gli altri sistemi) di una semantica più o meno vicina alla tradizione logica occidentale[24]. Spesso questi interpreti hanno manifestato scarsa sensibilità verso lo spirito originario di questi sistemi, non esitando ad arricchirli di elementi in contrasto con il nominalismo del loro autore.

Le stesse definizioni creative, come si è visto, hanno quasi sempre avuto scarsa fortuna tra i commentatori. Se c'è chi, come Iwanus, preferisce farne a meno, altri semplicemente le destinano ad una trattazione per sommi capi, limitandosi ad enunciare la dimostrazione di creatività, senza indagarne il meccanismo e le interessanti conseguenze filosofiche.

Forse questo è frutto del naturale scetticismo, già riscontrabile ad esempio in Frege[25], che porta a vedere le definizioni creative come un pericolo per la consistenza del sistema, un sintomo di bizzarria da eliminare. In realtà, esse sono una conseguenza forte ma immediata delle premesse poste sul nominalismo logico di Leśniewski. Invece, non seguono alcuna intuizione affine al platonismo logico che l'autore avversava - poichè il fruitore di un sistema logico indipendente, astratto e prefissato, non ha alcuna libertà creativa nel modificarne il potenziale deduttivo.

6.2 Un problema aperto

In verità, anche nel caso in cui si condividano le convinzioni filosofiche di Leśniewski, il discorso sulle definizioni creative è tutt'altro che concluso. Infatti, possiamo esibire dei "testimoni" di definizione creativa - ad esempio (21), ma manca una

[23] vd. B.Iwanus, *On Leśniewski s elementary Ontology* cit.

[24] Per una disamina esaustiva di queste proposte vd. R.Urbaniak, *Leśniewski Systems of Logic and Mereology* cit.

[25] Cfr. E.C.Luschei, *The Logical Systems of Leśniewski*, Amsterdam, North Holland, 1962, pag.132.

comprensione profonda del “meccanismo generale”, che consente a certe definizioni di avere questa proprietà.

Se la teoria della definizione è il perno concettuale attorno a cui è posta l'*Ontologia*, la creatività è una conseguenza ancora inesplorata del suo carattere inscrizionale e costruttivo. Per questo motivo si tratta, a mio avviso, dell'ambito di ricerca più interessante, anche se spesso trascurato, in riferimento ai sistemi logici di Leśniewski.

Riferimenti bibliografici

[1] K.AJDUKIEWICZ, *La connessità sintattica*, orig. 1935, trad. A.Bonomi, in *La struttura logica del linguaggio*, Bergamo, Studi Bompiani, 2001, pp.345-372.

[2] J.T.CANTY, *Leśniewski Ontology and Gödel Incompleteness Theorem*, Dissertazione di dottorato, University of Notre Dame, 1967.

[3] *Définition. Rôles et fonctions en logique et en mathématiques*, a cura di P. Joray e D. Miéville, Neuchâtel, CdRS, Université de Neuchâtel, 2007.

[4] *Stanislaw Leśniewski Collected Works*, a cura di S.J.Surma, J.T.J.Srzednicki, D.I.Barnett e V.F. Rickey. 2 voll., Dordrecht/Warszawa/Kluwer, Polish Scientific Publishers, 1992

[5] E.C.LUSCHEI, *The Logical Systems of Leśniewski*, Amsterdam, North Holland, 1962.

[6] M.MARSONET, *Logica e impegno ontologico, saggio su S.Leśniewski*, Milano, Arngeli, 1985.

[7] D.MIÉVILLE, *S.Leśniewski, ou une manière d'aborder l'ontologie*, Sémiotiques, 1992, 2, pp.19-35.

[8] D.MIÉVILLE, *Introduction a l'oeuvre de S.Leśniewski, fascicule I: la protothétique*, Neuchâtel, CdRS, Université de Neuchâtel, 2001.

[9] D.MIÉVILLE, *Introduction a l'oeuvre de S.Leśniewski, fascicule II: l'Ontologie*, Neuchâtel, CdRS, Université de Neuchâtel, 2004.

[10] F.V.RICKEY, *Creative definitions in propositional calculi*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 1975, XVI, 2, pp.273-294.

[11] J.S.SLUPECKI, *Leśniewski Protothetics*, Studia Logica, 1953, I, pp.44-111.

[12] J.S.SLUPECKI, *Leśniewski Calculus of Names*, Studia Logica, 1955, III, pp.7-70.

[13] B.SOBOCINSKI, *On the Single Axioms of Protothetic*, Notre Dame Journal of Philosophy, 1960, I/II, pp.52-73/pp.111-126 e 129-148.

[14] *Leśniewski Systems. Ontology and Mereology*, a cura di J.Srzednicki e F.Rickey, Boston/The Hague/Nijhow/Ossolineum, Martinus Nijhow Publishers, 1984.

[15] R.URBANIAK, *Leśniewski Systems of Logic and Mereology; History and Re-evaluation*, Dissertazione di dottorato, University of Calgary, 2008.