# La definizione nell'*Ontologia* di S.Leśniewski
## *Uno studio sulle definizioni creative*

Fabio Zanasi
zanasi.fabio@gmail.com

Ce n'est pas d'où vous prenez les choses - mais où vous les amenez.
*Jean-Luc Godard*

# Indice

# Introduzione

[I owe to S. Leśniewski] almost everything which I shall say about expressions in quotation marks and the semantical antinomies.
*A. Tarski*[1]

Leśniewski's ontology remains an early source of a language whose terminology is thoroughly explained; whose coherence is contextually determinate and unambiguous; whose type theory adheres closely to categories which must be recognized in ordinary language; and whose directives for development mirror the contextually determinate development that is to be expected of a vehicle for communication.
*J.T. Canty*[2]

Stanislaw Leśniewski (1886-1939) è stato uno dei principali esponenti della scuola logico-filosofica polacca, attiva a Leopoli e Varsavia tra le due guerre. Pensatore di grande originalità, fu logico raffinato, dotato di grande indipendenza critica nei confronti dei suoi contemporanei. La sua opera è tutt'oggi sconosciuta ai più, forse proprio a causa della sua eterodossia, oltre che per motivi di più stretta contingenza storica: la morte lo colse prematuramente, ed i suoi molti scritti inediti andarono distrutti durante la seconda guerra mondiale[3].

Leśniewski ebbe una formazione filosofica; si addottorò nel 1912, sotto la supervisione di K. Twardowski, iniziatore della 'scuola polacca' e seguace di F. Brentano. Nel 1911, Leśniewski rimase folgorato dalla lettura del testo di J. Lukasiewicz sul principio di contraddizione in Aristotele[4]. In particolare, la scoperta dell'antinomia di Russell "dell'insieme di tutti gli insiemi che non hanno sè stessi come membri" spostò gradualmente il suo interesse verso la logica e la matematica. In questa seconda fase del suo pensiero, egli si rese autore di due calcoli logici assiomatici, chiamati *Prototetica* ed *Ontologia*[5]. Questi sistemi nacquero dall'esigenza di fornire un contesto formalizzato, entro il quale poter rendere esplicita quella che riteneva essere la soluzione all'antinomia di Russell.

[1] [Tarski 1934], p.155, n.1.
[2] [Canty 1969c], p.163.
[3] Per un inquadramento biografico dell'autore, cfr. [Lejewski 1995].
[4] [Lukasiewicz 1907]. Cfr. [Leśniewski 1992], p.181.
[5] Leśniewski sviluppò anche un terzo sistema assiomatico, detto *Mereologia*, che non sarà oggetto della presente trattazione.

I termini della proposta fondazionale di Leśniewski non verranno approfonditi nel presente lavoro[6]. La *Prototetica* e soprattutto l'*Ontologia* rivestono un interesse autonomo, in virtù dell'originalità e della profonda coerenza filosofica che li contraddistingue.

Il disegno che guida la costruzione di tali teorie rispecchia una differente concezione della logica, che si discosta in maniera netta dal paradigma inaugurato dai *Principia Mathematica*[7]. Nella tradizione Leśniewski viene descritto come un 'nominalista', ma questa posizione può essere specificata in almeno due direzioni differenti. In primo luogo, egli considerava i sistemi logici non come realtà ideali ipostatizzate, ma come collezioni di segni dipendenti da un supporto fisico, che fosse gesso su una lavagna o inchiostro sul foglio. In secondo luogo, i suoi sistemi deduttivi sono costruiti in modo tale da essere ontologicamente neutri, in quanto non viene presupposta l'esistenza di alcun individuo nell'universo di discorso.

Inoltre, Leśniewski aveva della logica una concezione 'anti-formalista': l' 'arte' di costruire sistemi deduttivi si traduce in una continua ricerca di equilibrio, tra le esigenze della formalizzazione e le proprie intuizioni concettuali, tra la consistenza degli assiomi e la loro *verità* intuitiva, tra una costruzione sintattica e la sua interpretazione.

Negli scritti di Leśniewski, tali posizioni non sono enunciate esplicitamente, quanto piuttosto 'messe in pratica' mediante la formalizzazione. Questo processo di mediazione, tra sensibilità filosofica e correttezza formale, ha come punto d'approdo un rinnovato interesse per la *definizione*.

Una posizione molto comune tra i logici del $XX^o$ secolo - si prenda come esempio un qualsiasi manuale di introduzione alla disciplina - contempla le definizioni come convenzioni tipografiche, prive di implicazioni teoriche. I *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead sono un influente precursore di questa posizione, proprio negli stessi anni in cui Leśniewski sviluppava le proprie teorie assiomatiche, con una considerazione delle definizioni di tutt'altro genere.

Se nei *Principia* le definizioni sono presentate come 'espedienti di abbreviazione', Leśniewski invece attribuiva ad esse una grande rilevanza concettuale. A differenza di Russell, nell'opera di Leśniewski la definizione delle costanti logiche del sistema è posizionata *all'interno* del sistema stesso. Le tesi definitorie sono teoremi logici. L'introduzione di definizione è a tutti gli effetti una regola di inferenza, formalizzata da Leśniewski con estremo rigore, affinché le definizioni siano formule ben formate e preservino la consistenza del sistema. A giudizio di molti[8], egli è il logico che più di ogni altro ha specificato tali requisiti con rigore formale, accuratezza ed esaustività.

Seguendo le sue indicazioni, è possibile sviluppare il proprio sistema deduttivo *in itinere*, preservando la sua consistenza, estendendo il suo potere espressivo con nuove costanti logiche da noi definite.

[6] Per un approfondimento, vd. [Leśniewski 1927-31]. Per un bilancio sulla soluzione lesniewskiana all'antinomia di Russell, vd. soprattutto [Urbaniak 2008].

[7] [Russell, Whitehead 1910].

[8] Ad esempio [Luschei 1962], p.36 e [Rogers 1971], p.95 n.5.

Una conseguenza immediata di tale approccio è l'atteggiamento costruttivo che bisogna assumere nei confronti di qualsiasi sistema formale sviluppato secondo i dettami di Leśniewski. La collocazione interna, e non esterna, delle definizioni configura i suoi sistemi come teorie in crescita, dove ciascuna definizione stabilisce un 'prima' ed un 'dopo' nella derivazione. Inoltre, ogni sistema rappresenta un *unicum*, in quanto può essere sviluppato in direzioni differenti, aggiungendo nuove costanti logiche alla base comune formata dai simboli primitivi, presenti allo stadio iniziale.

Un risvolto ulteriore, di grande interesse, può essere osservato considerando il rapporto tra definizioni e dimostrazioni. Un pregio della revisione lesniewskiana è quello di rendere trasparente il ruolo delle definizioni nel determinare la capacità deduttiva del sistema a cui si riferiscono. Sulla base di ciò, è possibile dimostrare che, per alcuni teoremi dei sistemi di Leśniewski, c'è una dimostrazione a partire dagli assiomi e certe definizioni, ma non dai soli assiomi. Questa proprietà individua una sottoclasse di definizioni, dette *creative*. Una definizione creativa non solo aumenta la capacità espressiva del sistema, ma anche la sua capacità deduttiva, in quanto 'dopo' la sua introduzione è possibile raggiungere teoremi che non erano derivabili in precedenza.

le definizioni creative sono state viste di frequente come una bizzarria della logica, un sintomo di inconsistenza da eliminare. Quando specificato, uno dei pochi requisiti che gli autori hanno posto alle definizioni è proprio quello di non-creatività[9]. Leśniewski vedeva invece nel potenziale creativo una prova ulteriore del valore teoretico delle definizioni.

La possibilità di incrementare *in itinere* la capacità deduttiva contraddistingue i suoi sistemi logici da qualsiasi calcolo assiomatico di mia conoscenza, sia riconducibile alla 'logica classica' che a quelle 'non-classiche'. In una prospettiva epistemologica, potremmo dire che, grazie alla presenza delle definizioni creative, la logica di Leśniewski si rivela capace di asserzioni *sintetiche*. In altri termini, i suoi sistemi formali si configurano come teorie in espansione, dove le premesse (gli assiomi) non contengono già per intero le possibili conclusioni: un modello di ragionamento *ampliativo*, in contrasto con il ragionamento meramente deduttivo - composto di asserzioni *analitiche* - proprio dei calcoli assiomatici classici[10].

Sulla base di queste suggestioni, quello della creatività si connota come un ambito di ricerca di grande interesse, che potrebbe aprire prospettive inedite anche rispetto agli sviluppi successivi della logica contemporanea. Dal momento che si tratta di un campo ad oggi poco esplorato, sul quale non è apparso alcuno studio sistematico, rappresenta a mio avviso il filone di indagine più promettente in relazione ai sistemi di Leśniewski.

Con il presente lavoro intendo perseguire un duplice obiettivo: fornire una introduzione al tema delle definizioni nei sistemi logici di Leśniewski, coniugando elementi di interesse filosofico ad altri di carattere più tecnico; fornire un

[9]Cfr. ad esempio [Rogers 1971], p.95-96.

[10]Per un quadro più dettagliato dello sviluppo storico dell'idea di definizione creativa, cfr. "Breve storia delle definizioni creative" in § 3 e [Joray, Mièville 2007].

contributo alla ricerca sulle definizioni creative, proponendo alcuni meta-teoremi sulla creatività nel sistema logico dell'*Ontologia*.

**Il primo capitolo** della trattazione intende precisare i presupposti filosofici dell'opera di Leśniewski. Infatti una trattazione, anche tecnica, di questo autore non può prescindere da una esposizione delle sue motivazioni concettuali, proprio in virtù dell'idea stessa che Leśniewski aveva dell'attività logica. L'aspetto formale dei suoi sistemi deduttivi è inscindibile dalla loro interpretazione intuitiva, pre-formale, e dal disegno concettuale che ne guidò la costruzione.

**La prima sezione** è dedicata alla concezione inscrizionale dei sistemi logici, dei teoremi e dei simboli che li compongono. Leśniewski non specifica alcun insieme di formule ben formate, nè fissa un alfabeto dei simboli logici. Piuttosto, specifica regole d'inferenza nel sistema (che egli chiama *direttive*) le quali precisano a quali condizioni, di buona formazione e teorematicità, una qualsiasi formula può essere inscritta *relativamente ad un certo stadio di derivazione nel sistema inscrizionale.*

Alle *direttive* si accompagnano le *spiegazioni terminologiche*[11], redatte da Leśniewski al fine di specificare la sintassi delle formule inscrivibili per mezzo delle *direttive.* In questa meta-descrizione delle formule valide, Leśniewski caratterizza la nozione di *categoria semantica*, assimilabile per certi aspetti al *tipo* russelliano, per altri alla grammatica del discorso nelle lingue naturali. La *teoria delle categorie semantiche* è l'oggetto della **seconda sezione** del primo capitolo.

**Nella terza sezione** si introducono alcuni elementi per valutare l'affermazione secondo cui i sistemi logici di Leśniewski sono, in coerenza con il suo 'nominalismo', ontologicamente neutri. In particolare, si chiarisce quale sia l'interpretazione intesa, pre-formale, del funtore[12] $\varepsilon$, unico simbolo primitivo dell'*Ontologia* rispetto alla *Prototetica.* Al fine di indagare le presupposizioni esistenziali delle formule rette da $\varepsilon$, si elucida il rapporto tra segni della categoria semantica dei 'nomi' e la loro denotazione. Ulteriori elementi verranno introdotti nel secondo capitolo, quando diviene evidente la connessione tra struttura delle tesi di definizioni e neutralità ontologica delle stesse.

**La quarta sezione** intende riprendere quanto detto nelle tre sezioni precedenti, mostrando come questi presupposti portino Leśniewski ad una rivalutazione del ruolo della definizione in logica. Dopo un breve confronto con la trattazione delle definizioni nei *Principia Mathematica*, il capitolo si conclude con la fondazione del sistema logico della *Prototetica*, basata sull'unico simbolo primitivo $\equiv$, deputato a rimpiazzare in un contesto teorico e formalizzato il simbolo meta-teorico di definizione $=_{def}$.

[11] Il corpus di *spiegazioni* e *direttive* rappresenta il lascito quasi esclusivo di Leśniewski, in merito ai sistemi logici di *Prototetica* ed *Ontologia*. Gli articoli relativi sono [Leśniewski 1929], [Leśniewski 1930a], [Leśniewski 1930b]. La precisione di Leśniewski, unita al suo simbolismo eterodosso, sono tali da rendere i suoi lavori una lettura tutt'altro che agevole. Per questo motivo si consiglia come complemento le annotazioni estese di [Luschei 1962], § 7. Ancora più accessibile (e sintetico) è [Mièville 2004], mentre [Canty 1969b] rappresenta un interessante tentativo di esprimere le *spiegazioni terminologiche* come concetti ricorsivi.

[12] In relazione all'opera di Leśniewski, è invalso il termine 'funtore' per indicare il segno grafico di funzione, preso in isolamento rispetto ai suoi argomenti.

**Il secondo capitolo** sviluppa il discorso sulla definizione, attraverso l'esposizione delle direttive per l'introduzione di definizione per il sistema logico dell'*Ontologia*. Ho scelto di focalizzare il discorso sull'*Ontologia* per diverse ragioni. La sua potenza espressiva consente una comparazione più diretta con la logica del primo ordine classica. L'arricchimento di una seconda categoria semantica primitiva, quella dei nomi, rende l'*Ontologia* un ambiente espressivo ottimale dove sviluppare diverse tematiche dell'ontologia tradizionale, legate soprattutto al rapporto tra nomi ed oggetti, all'esistenza e la negazione. Una terza ragione riguarda il fatto che lo studio sulle definizioni creative, del terzo capitolo, riguarda le definizioni di costante nominale, le quali sono esprimibili nell'*Ontologia* ma non nella *Prototetica*.

Come il precedente, questo capitolo è suddiviso in sezioni. **La prima sezione** descrive con un certo grado di approssimazione la direttiva di introduzione di definizione, di tipo nominale e di tipo proposizionale. Per ragioni di economia del discorso, non verrà dedicato spazio ad una esposizione organica sull'*Ontologia*, che contempli anche l'analisi delle altre direttive ed alcune teorie - ad esempio la teoria del sillogismo e l'algebra dei nomi - che possono essere sviluppate all'interno del sistema. Per un tale approfondimento, rimando soprattutto a [Slupecki 1955] ed al più recente [Mièville 2004].

Ciò nonostante, vengono comunque esposte alcune delle definizioni che è possibile introdurre nell'*Ontologia*. Questo accade nella **seconda sezione**, che ha il duplice scopo di 'mettere in pratica' le direttive illustrate e dare una idea di come la teoria di Leśniewski si riveli congeniale ad esprimere questioni di metafisica tradizionale, spesso in modo più espressivo rispetto alla logica dei predicati classica.

Il primo esempio riguarda la nozione di esistenza: si ha così l'opportunità di esporre anche l'unico assioma dell'*Ontologia*, il quale precisa meglio il significato del simbolo primitivo $\varepsilon$, che era stato abbozzato in maniera informale nel primo capitolo. Vengono presentate tre differenti definizioni del predicato di esistenza nell'*Ontologia*. A partire da una di esse, si deriva un teorema dell'*Ontologia* che specifica in quale senso è possibile dare una interpretazione ontologicamente neutra dei quantificatori del sistema.

Il secondo esempio riguarda la negazione ed il principio di non-contraddizione. Attraverso alcune definizioni vengono prese in esame due ulteriori peculiarità del sistema logico: il fenomeno della polisemia di un segno (per meglio dire: la diversità di significato di segni equiformi) e la possibilità di introdurre per definizione una 'gerarchia' di simboli per funzione. Con questo termine si indicano funtori tra loro equiformi, che esprimono il medesimo 'concetto', ma la cui categoria semantica è di complessità crescente.

**Il terzo capitolo** intende costituire il contenuto originale della presente trattazione. Vi sono riassunte le ricerche che ho condotto, in collaborazione con F.V. Rickey (professore di Analisi a West Point e allievo del logico polacco B. Sobocinski), sul tema delle definizioni creative dell'*Ontologia*. Come testimoniato dai suoi articoli, apparsi tra gli anni '70 e gli '80, Rickey ha più volte suggerito l'idea che l'*Ontologia* consentisse l'introduzione di un numero *arbitrariamente grande* di definizioni creative. Nel 2009 ho fornito una dimostrazione della congettura, a partire proprio da elementi formali introdotti in [Rickey 1985]. In seguito, lo stesso Rickey ha notato una seconda interpretazione dell'enunciato della congettura, che poteva essere dimostrato con differenti mezzi dimostrativi.

**La prima parte** del capitolo precisa la nozione formale di creatività e fornisce una dimostrazione classica del fatto che l'*Ontologia* contenga definizioni creative. Nel seguito vengono introdotti alcuni lemmi, i quali consentono di dimostrate la prima versione dell'enunciato della congettura.

**Nella seconda sezione** si introduce la semantica a modelli elaborata da Rickey al fine di interpretare le tesi di un frammento dell'*Ontologia*, detto *Ontologia elementare*. La seconda versione della congettura viene dimostrata con l'ausilio di queste nozioni.

**Nell'ultima sezione** del capitolo si indaga su quanto il lavoro svolto riveli intorno al meccanismo della creatività. Come talvolta accade, più che l'enunciato del teorema, è la sua dimostrazione a farci scoprire qualcosa di nuovo e sorprendente riguardo l'oggetto di discorso. Così, i modelli naturali di Rickey si rivelano una 'cartina di tornasole', che fornisce informazioni sullo stato del sistema le cui tesi interpretano. Tanto più l'*Ontologia* è stata potenziata con l'inserimento di definizioni creative, tanto più sono "complessi" (in un senso da specificare) i modelli che soddisfano le sue tesi.

Ragionando in questo senso, la terza sezione considera le basi assiomatiche proposte da Iwanus e da Stachniak, che neutralizzano il potenziale creativo di qualsiasi definizione dell'*Ontologia*. I modelli naturali che soddisfano gli assiomi addizionali di Iwanus hanno requisiti più stretti, sufficienti anche a verificare qualsiasi tesi derivabile da qualsiasi definizione: così queste definizioni non risultano creative. In aggiunta, il fatto che due soli assiomi siano sufficienti a inibire il potenziale creativo suggerisce un legame tra la definizione di costanti nominali e l'algebra dei nomi che può essere costruita all'interno dell'*Ontologia*.

Gli assiomi di Stachniack, invece, indicano un rapporto tra definizioni e principio di comprensione. Ogni definizione è un contributo al principio di comprensione, nel senso che definisce una intensione (un termine) per una data estensione (la sottoformula che lo definisce). Il fatto che l'*Ontologia* non disponga, tra i propri assiomi, di uno schema di comprensione per i nomi potrebbe essere la ragione della creatività di alcune sue definizioni.

# Capitolo 1

# Presupposti filosofici dei sistemi logici di Leśniewski

La formazione di Leśniewski fu filosofica, ed egli si occupó dei fondamenti della Matematica dichiaratamente come "apostata della filosofia". Ai matematici Leśniewski contestava in particolare l'attitudine formalista, della quale vedeva l'espressione nell'utilizzo di 'calcoli' non interpretati, in cui derivare formule 'senza senso', disinteressandosi del loro significato. Leśniewski enfatizzava il suo disaccordo con questa visione della logica professandosi un 'intuizionista'; non nel senso che egli fosse un seguace della scuola di Brouwer, ma perché riteneva che l'interpretazione dovesse andar di pari passo con la formalizzazione. Per questo, nonostante le sue teorie avessero ricevuto una veste formale precisa e consistente, erano basate su assiomi e regole che avevano per Leśniewski "una irresistibile validità intuitiva"[1].

Questa sensibilità nella costruzione di teorie deduttive avvicina Leśniewski alla precedente tradizione logica, in particolare quella di derivazione aristotelica, già presente a Varsavia grazie agli studi di J. Lukasiewicz ([Lukasiewicz 1907]).

Per usare le parole del suo stesso autore, è possibile presentare l'*Ontologia* come "un certo di tipo di logica tradizionale modernizzata"[2]; seguendo questa linea di pensiero, si può notare una certa affinità tra Leśniewski ed Aristotele, in particolare riguardo al rapporto tra logica e metafisica.

Secondo [Kotarbisnki 1967], il sistema logico di Leśniewski intende porre il proprio oggetto di discorso al massimo grado di generalità, allo stesso modo della "scienza dell'essere in quanto essere", presentata da Aristotele nei libri della *Metafisica*.

Alla luce di questa lettura, non deve stupire che più di uno studioso di logica antica e medievale si sia servito dei sistemi di Leśniewski per rivisitare le questioni dell'ontologia tradizionale. Ne sono un esempio gli studi di D. P. Henry ([Henry 1969]), ma anche l'appendice a [Lukasiewicz 1907] (edizione italiana) curata da A. Testi, il quale si serve del linguaggio dell'*Ontologia* per indagare il principio di contraddizione in Tommaso D'Aquino.

[1] [Leśniewski 1929] in [Leśniewski 1992], p. 487.

[2] "*The theory I call ontology, which forms a certain kind of modernized 'traditional logic'*", *ibidem* p. 412.

Nel pensiero di Leśniewski, alla sopraccitata affinità con i temi dell'ontologia e della logica tradizionali si accompagna un netto rifiuto delle entità astratte: universali, proprietà, relazioni - più in generale, tutto ciò che non è concreto, individuale e situato nello spazio e nel tempo. Già presente negli scritti giovanili[3], questa posizione si radicalizza nel tempo, tanto da avere importanti conseguenze sulle scelte che Leśniewski compie in fase di costruzione dei propri sistemi logici. Per le sue posizioni rispetto al problema degli universali, si potrebbe descrivere Leśniewski come un *nominalista*, nel senso tradizionale del termine. In realtà, il suo punto di vista si sviluppa in modo più pervasivo, in quanto non riguarda solo l'oggetto di discorso della logica, ma lo statuto degli stessi sistemi formali, e dei segni di cui le loro formule si compongono.

Leśniewski concepiva le costruzioni della logica come collezioni materiali di segni grafici, la cui analisi deve avvenire in modo rigidamente costruttivo e puramente estensionale. Lo stesso sviluppo deduttivo del sistema deve seguire regole la cui specificazione è sempre relativizzata ad un particolare stadio di derivazione, quello sino ad ora raggiunto. Infine, i sistemi formali di Leśniewski sono realizzati in modo tale da non richiedere alcuna presupposizione extra-logica; in particolare, le tesi dell'*Ontologia* risultano vere anche qualora siano interpretate su un dominio vuoto di enti, e dunque ogni nome che compare nelle formule sia considerato come privo di denotazione.

Negli scritti dedicati alla *Prototetica* e *Ontologia*, le convinzioni filosofiche presentate non vengono rese esplicite, né si può dire che Leśniewski fosse interessato a darne una esposizione sistematica. Tuttavia, il pensiero filosofico dell'autore influenza in modo pervasivo la sua logica, motiva il ricorso ad un linguaggio espositivo scrupoloso, spiega la particolarità di alcune scelte tecniche. La stessa valorizzazione teorica della definizione risulta poco comprensibile, se privata di questo sfondo concettuale. La chiarificazione delle idee sopra accennate, oggetto del presente capitolo, costituisce dunque una tappa d'avvicinamento al tema principale della trattazione.

## 1.1 Inscrizionalismo

Nella visione di Leśniewski una teoria logica si deve articolare senza alcuna presupposizione esistenziale, nè riferimento ad entità astratte. Questa forma di nominalismo riguarda in primo luogo lo *status* ontologico dei sistemi logici stessi, considerati nella loro interezza. Essi non sono altro che collezioni di segni grafici, presenti in numero finito su un qualche supporto fisico. L'esistenza di un sistema logico è dipendente e riducibile alla sua presenza materiale come inchiostro su un foglio, oppure gesso su una lavagna.

Questa posizione, ribattezzata da P. Simons "inscrizionalismo", si discosta in modo netto dalla tradizione logica contemporanea a Leśniewski. Forse, è più corretto dire che è molto raro trovare autori che si preoccupino con analoga sensibilità di specificare se le loro trattazioni facciano riferimento ai sistemi logici in

[3]Cfr. la confutazione dell'esistenza degli 'oggetti generali' astratti, [Leśniewski 1913] in [Leśniewski 1992], pp.50-53.

quanto sistemi di segni, oppure come correlati astratti di questi. A questo proposito, possiamo desumere l'atteggiamento prevalente dalle consuetudini linguistiche: ad esempio il riferirsi ad un sistema logico, tramite l'uso dell'articolo determinativo.

Quando intendiamo riferirci alla teoria di Russell e Whitehead, usiamo l'espressione "**IL** sistema logico dei *Principia Mathematica*". Ma quali intuizioni abbiamo intorno all'esistenza di un oggetto che corrisponda a questo appellativo? Possiamo fornire una risposta considerando il caso di due persone, che scrivono differenti derivazioni del sistema dei PM su due lavagne distinte.

Probabilmente, non ci verrebbe in mente di asserire che stanno sviluppando due sistemi logici *differenti*. Perciò, siamo portati a considerare ciò che stanno scrivendo come *istanze materiali* dello stesso sistema, concepito dunque come una realtá astratta ed ipostatizzata. Se accettiamo i presupposti di questo esempio, dobbiamo convenire che si tende ad utilizzare riferimenti linguistici per i sistemi logici, come se questi fossero entità autonome ed astratte.

Al contrario, Leśniewski espone i propri sistemi formali con un linguaggio molto controllato, facendo attenzione a rispettare la concezione inscrizionale sopra presentata. A rigore, è scorretto riferirsi ad "**IL** sistema dell'*Ontologia*". Tutto ciò di cui possiamo parlare è **UN** particolare sistema dell'*Ontologia*, derivato qui ed ora su un qualche supporto fisico.

Questo implica che non esiste alcuna infinità attuale di teoremi logici, ma solo i teoremi, in numero *finito*, che fino a questo momento abbiamo derivato a partire dagli assiomi.

**Il ruolo di *spiegazioni terminologiche* e *direttive*** Poniamo il caso di diverse lavagne, sulle quali abbiamo derivato due differenti sistemi di *Ontologia*, composti da un numero finito di teoremi logici. A seconda delle definizioni che abbiamo scelto di introdurre, i due sistemi hanno diversi insiemi di costanti logiche, dunque condizioni differenti di buona formazione delle formule[4]. Per la presenza o meno di definizioni creative, anche la loro capacità deduttiva potrebbe essere diversa.

Che cosa accomuna allora questi due sistemi di segni? Solo un corpus di regole, chiamate *spiegazioni terminologiche* e *direttive*, che determinano le restrizioni a cui viene sottoposto lo sviluppo formale di una qualsiasi possibile *Ontologia*.

Nei suoi scritti[5], Leśniewski non stila alcuna definizione induttiva dell'insieme infinito delle formule ben formate; specifica invece quali possibili forme può avere una nuova tesi che scegliamo di inscrivere *ad un certo stadio di derivazione*, nel sistema che stiamo sviluppando in un dato momento.

[4]Per rimarcare la differenza con una caratterizzazione 'in astratto' del requisito di buona formazione, si consideri che in un sistema inscrizionale nuove costanti logiche vengono definite man mano che procede la derivazione. Pertanto formule contenenti tali costanti saranno mal formate nel segmento di derivazione precedente la definizione, ma eventualmente ben formate dopo che la definizione è stata introdotta.

[5]Vd. in particolare [Leśniewski 1929], [Leśniewski 1930a]. Il linguaggio di Leśniewski è talmente rigoroso che si presta ad essere tradotto in maniera piuttosto agevole in un vero e proprio meta-sistema assiomatico, volto a specificare formalmente la sintassi inscrizionale dei suoi sistemi logici. Per alcune proposte, riguardanti *spiegazioni* e *direttive* della *Prototetica*, cfr. [Rickey 1972], [Rickey 1973] e [Le Blanc 1991].

Questa caratterizzazione si articola in due fasi. In via preliminare, le *spiegazioni terminologiche*, scritte in un metalinguaggio semi-formalizzato, formano un vocabolario di termini tecnici - ad esempio 'espressione', 'parentesi', 'omomorfo', 'ultima parola in', 'successore di' - con i quali riferirsi alla forma grafica estensionale delle 'inscrizioni'. Di questa terminologia fa uso il metalinguaggio delle *direttive*; in termini puramente sintattici ed estensionali, esse prescrivono le possibili forme di una nuova espressione B, che può essere aggiunta come tesi del sistema relativamente ad una tesi A, ultimo teorema attualmente inscritto nella nostra *Ontologia*.

Dunque uno sviluppo di *Ontologia* è analogo ad una partita a scacchi. C'è una sequenza di mosse (stadi di sviluppo), le quali differiscono da quelle di un'altra partita, giocata in un altro momento su una altra scacchiera. Ciò che accomuna tutte le partite sono le regole del gioco, espresse sotto forma di *direttive*, la cui terminologia è illustrata dalle *spiegazioni*.

La concezione inscrizionale della logica si riflette anche sulle singole parti del sistema stesso. Un segno $x$, in una data formula, ed un secondo segno $x$, in una formula differente, non sono occorrenze materiali di una medesima entità astratta - tra di essi non vige alcuna relazione che ne pre-determini una "identitá di significato".

La loro interpretazione semantica ed il loro ruolo sintattico vengono stabiliti su un piano puramente estensionale, in virtù di tratti esteriori, quali l'equiformità grafica, ed il contesto nel quale sono inseriti. Lo stesso Leśniewski espone i propri sistemi logici riferendosi ai termini come oggetti concreti e spazio-temporalmente situati, mai come entità in astrazione rispetto alle proprie istanze contestuali. Per usare la terminologia di Peirce: le parti delle espressioni logiche sono sempre concepite come *tokens*, mai come *types*.

In sintonia con tale atteggiamento, Leśniewski non pone alcuna convenzione sulla forma tipografica dei segni logici. Essi infatti sono sempre analizzati in virtù delle informazioni fornite dal contesto; il carattere tipografico scelto non è portatore di alcun ulteriore attributo 'intensionale'. Per contrasto, si prenda ad esempio il seguente passo di Russell:

> We will adopt the following conventions. Variables of the lowest type occurring in any context will be denoted by small Latin letters [...]; a predicative function of an argument x [...] will be denoted by $\phi$!x (where $\psi$, $\chi$, $\theta$, f, g, F, or G may replace $\phi$)[6]

In coerenza con l'inscrizionalismo sopra illustrato, nessuna di queste convenzioni tipografiche è richiesta nei sistemi logici di Leśniewski.

## 1.2 Categorie semantiche

Se i segni grafici non hanno alcuna 'proprietà', in virtù della loro forma tipografica, si rende necessaria una qualche forma alternativa di regimentazione del linguaggio logico, che sia però coerente all'inscrizionalismo sopra presentato.

[6] [Russell 1908], p.240.

A questo proposito Leśniewski propone la teoria delle categorie semantiche. Si tratta di una gerarchia di generi grammaticali, che si ispira alla sintassi delle lingue naturali, ma svolge un ruolo analogo alla teoria dei tipi semplici di Russell[7].

In relazione ad un certo stadio di sviluppo del sistema logico, possiamo definire una categoria semantica come l'insieme dei segni linguistici attualmente inscritti, i quali possono essere inter-sostituiti in qualunque contesto estensionale preservando la sensatezza degli enunciati.

La gerarchia delle categorie semantiche viene costruita su due categorie primitive. La prima, quella delle "proposizioni" (*sentences*, abb. S)[8], viene introdotta dalla base assiomatica della *Prototetica*. La seconda, quella dei "nomi" (*nouns*, abb. N), viene ad aggiungersi al passaggio all'*Ontologia*.

A partire da *nomi* e *proposizioni*, è possibile introdurre categorie di ordine superiore, dette *funtori* (segni grafici di funzione). La notazione adottata per i funtori ha la sintassi "categoria del valore/categorie degli argomenti". Ad esempio, S/NN è la categoria dei funtori che prendono come argomenti due nomi e restituiscono come valore una proposizione. S/(S/NN) è la categoria dei funtori che prendono come argomento un funtore della categoria appena indicata, e restituiscono come valore una proposizione. È evidente come il procedimento sia iterabile, generando una gerarchia di funtori di complessità crescente.

Da ció discende che il numero e la complessità delle categorie semantiche è potenzialmente un infinito numerabile. Tuttavia, è importante sottolineare che, ad un determinato stadio di avanzamento del sistema logico, le categorie semantiche sono sempre in numero finito. Cosí come non "esiste" l'insieme infinito dei teoremi dell'*Ontologia*, non esiste alcuna attualità infinita di categorie semantiche. Ma come si può allora estendere la collezione di categorie iniziali? Tramite definizione di una costante logica, che sia di una categoria semantica inedita, di cui essa diventa il prima rappresentante.

La definizione ha perciò una triplice valenza. Sul piano sintattico, è una nuova tesi del sistema. Sul piano lessicale, estende la collezione di costanti logiche con un nuovo segno; congiuntamente, sul piano semantico-grammaticale, dalla costante logica è desunta una categoria, che può essere già presente nella collezione o meno. Se è già presente, la costante logica viene legata alla categoria, come una sua "nuova entrata sintattica". Se invece la categoria non è ancora stata utilizzata, essa viene aggiunta a quelle già presenti, relativamente allo stato attuale della derivazione sintattica nel sistema.

Determinare la categoria semantica della nuova costante è un procedimento algoritmico, il cui input è il contesto sintattico dell'espressione entro cui essa si trova. Con una analisi *top-down*, l'albero sintattico viene interpretato categorialmente, in ogni sua ramificazione. La gerarchia tra i rami è data dalla posizione che ogni componente occupa nel contesto dell'espressione. La computazione è finita e termina sempre con un risultato, che ad ogni segno assegna la sua categorie di appartenenza.

---

[7][Russell 1908].

[8]Evidentemente, questo termine non ha per Leśniewski il significato che possiede invece presso altri autori; è invece sinonimo di 'enunciato', 'frase'.

Il testo di riferimento per vedere nel dettaglio l'algoritmo di assegnazione è [Ajdukiewicz 1935]. Egli prende in considerazione espressioni arbitrarie, ma i suoi metodi sono applicabili anche alle tesi dei sistemi logici di Leśniewski. Infatti gli autori giungono ad un criterio di buona formazione per vie differenti, ma analoghe: Adjukiewicz sottopone a test un'espressione presa in isolamento (approccio *top-down*); Leśniewski garantisce la corretta formazione dei teoremi in virtù della struttura sintattica con i quali essi vengono inscritti nel sistema logico (approccio *bottom-up*). Nel secondo caso, più 'costruttivo', tale struttura è resa esplicita dai vincoli imposti dalle *direttive*, e dunque la buona formazione diventa un requisito in entrata, che prescrive come generare espressioni piuttosto che prendere in analisi espressioni già costituite.

Una delle nozioni introdotte da Ajdukiewicz è quella di *indice categoriale*. Uno dei requisiti di buona formazione di una espressione è la possibilità di generare univocamente per essa un certo indice categoriale, che rappresenta la categoria semantica dell'espressione presa nel suo complesso. Ad esempio, una funzione di categoria S/S ha indice categoriale S, e può prendere come argomenti funtori di categoria S, S/S, S/SSS, S/(S/S)(S/N), .... Tutti questi argomenti sono categorie di espressioni con indice categoriale S. Si farà di nuovo riferimento a questa nozione nel corso della trattazione.

È interessante notare che l'assegnazione di categoria può portare ad esiti differenti in contesti differenti, anche se il segno in analisi occorre sempre della stessa forma tipografica. Ad esempio, due segni $\sharp$, a differenti stadi del sistema, potrebbero appartenere a diverse categorie semantiche. L'algoritmo infatti opera su *tokens*, basandosi unicamente sulla loro posizione all'interno dell'espressione. La possibilità di inscrivere segni equiformi, ma di categoria semantica differente, è una notevole caratteristica dei sistemi logici di Leśniewski, non presente nel paradigma logico classico. Questa "ambiguità sistematica" ricalca il fenomeno della *polisemia* nelle lingue naturali (vd. § 2.2.2).

La scelta di concepire una teoria delle categorie basata sulle parti del discorso (*nomi*, *proposizioni*) rispecchia la volontà di mantenere l'analisi meta-logica su un piano esclusivamente linguistico. In questo senso, pur condividendone alcuni scopi, le categorie semantiche si distanziano dai tipi logici di Russell. Se le categorie di Leśniewski impongono una stratificazione del linguaggio logico, la gerarchia di Russell sembra riguardare in ultima analisi il referente oggettuale dei segni logici, come è evidente già a partire dai nomi scelti per i tipi - *individui*, *funzioni*[9]. Per di più, i segni logici di Russell (intesi come *types* e non come *token*) "nascono" con un tipo già specificato, in virtù della propria forma tipografica. Invece, come già osservato, l'assegnazione categoriale prescinde dalle scelte tipografiche; per questo motivo, non può mai agire su un segno "in isolamento", ma deve servirsi del contesto nel quale il segno è inscritto[10].

[9]Cfr. [Russell, Whitehead 1910b], pp.22-23. A onor del vero, lo stesso Russell si 'ravvederà', scrivendo: "*The theory of types is really a theory of symbols not of things*"([Russell 1918], p.267).

[10]Curiosamente, alcuni tratti di questa dicotomia sembrano ripresentarsi per quanto riguarda la tipizzazione delle variabili del $\lambda$-calcolo. La tipizzazione di Church fa 'nascere' i termini con un tipo, mentre l'assegnazione 'alla Curry' determina il tipo dell'argomento funzionale in base al contesto. Cfr. [Barendregt 1992].

## 1.3 Neutralità ontologica

Una ulteriore declinazione del nominalismo di Leśniewski consiste nella liberazione dei suoi sistemi logici da ogni presupposizione di esistenza. Questo tema è affrontato in modo essenzialmente differente rispetto alle linee guida delineate da Quine[11]. Nell'ottica di Leśniewski, l'impegno ontologico dell'*Ontologia* non è investigato mediante una analisi della quantificazione (punto sul quale comunque si tornerà - vd. § 2.2.1), quanto piuttosto considerando il ruolo svolto da un funtore speciale, della forma $\varepsilon$.

Dalla *Prototetica*, ad un qualsiasi stadio di derivazione, si 'passa' all'*Ontologia* grazie all'aggiunta di un unico assioma come tesi del sistema. Tra i termini dell'assioma c'è un'unica costante funtoriale non-definita, 'nuova' rispetto alla *Prototetica*, della forma tipografica $\varepsilon$. Possiamo pensare a questa prima tesi dell'*Ontologia* come la caratterizzazione - l'interpretazione intesa - del significato di $\varepsilon$. L'assioma nella sua interezza verrà presentato in modo più approfondito nella sezione 2.2.1. Nell'economia del discorso attuale, è importante invece soffermarsi sulle intuizioni riguardo $\varepsilon$ che Leśniewski ritiene di formalizzare mediante l'assioma.

La categoria semantica del funtore è S/NN. Una formula $\varepsilon\{aA\}$ (in notazione prefissa, vd.§ 2.2.2) ha indice categoriale S, dove $a$ e $A$ sono due argomenti nominali.

$$a \,\varepsilon\, A \tag{1.1}$$

Come prima intuizione, possiamo pensare a $\varepsilon$ come alla forma verbale *è* del nostro linguaggio naturale (*est* latino, *jest* polacco), quando questa svolge il ruolo di copula in una predicazione nominale. Dunque leggeremo la formula come 'a è A', in analogia con gli asserti della forma 'Socrate è uomo' trattati nella teoria del sillogismo aristotelico. A differenza del calcolo dei predicati classico, l'*Ontologia* 'spezza' il predicato nominale in tre parti, mostrando in questo maggiore affinità con la logica antica (tabella 1.1).

| **Linguaggio naturale** | **Logica del primo ordine** | ***Ontologia*** |
|---|---|---|
| Socrate è mortale | m(S) | S $\varepsilon$ m |

Tabella 1.1: predicazione a confronto

Questa scelta concettuale è feconda di conseguenze: in primo luogo, cade l'assimilazione dei predicati ad insiemi di individui.

I nomi comuni - "mortale", "umano" - sono trattati alla stregua dei nomi propri - "Socrate", "Geronimo".

Inoltre, l'*Ontologia* consente di distinguere, ad esempio, tra differenti accezioni grammaticali del termine "mortale": si può definire come predicato ($m(x)$,di indice categoriale S), oppure come nome comune per ciascuno degli individui mortali ( $x \,\varepsilon\, M$, con $M$ di indice categoriale N)[12].

I nomi possono essere individuali o comuni, a seconda che la loro denotazione sia singolare o plurale. Ma essi possono essere anche vuoti, se non denotano

[11] Ad esempio cfr. [Quine 1961].

[12] Una analoga distinzione verrà presentata in termini più formali per la negazione. Cfr. § 2.2.2.

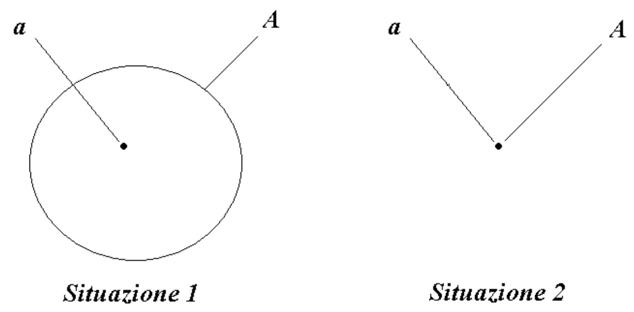


Figura 1.1: Le due situazioni nelle quali, secondo l'interpretazione intuitiva, è vero $a \varepsilon A$. Nel primo caso, $a$ è un nome proprio e $A$ un nome comune; nel secondo caso, sono entrambi nomi propri.

nulla. L'estensione del nome in un dominio di oggetti non modifica in alcun modo la categoria semantica di appartenenza. I nomi non hanno alcuna sottocategorizzazione: la semantica categoriale prescinde dalla cardinalità e dalla struttura dell'universo di discorso[13], ed in questo senso non impegna alcun segno ad avere una denotazione.

Con questo non si intende dire che ogni espressione della forma $a \varepsilon A$ sia sempre vera. Le sue condizioni della verità sono esplicitate dall'assioma dell'*Ontologia* e dipendono dall'estensione dei nomi $a$ e $A$. In linguaggio naturale, possiamo dire che $a \varepsilon A$ quando sono soddisfatte le seguenti condizioni (fig. 1.1):

1. $a$ è un nome che ha come estensione un individuo.

2. $A$ è un nome che ha come estensione un individuo oppure piú individui.

3. Ciò che è nominato da $a$ ricade anche nell'estensione di ciò che è nominato da $A$.

Queste condizioni costituiscono una 'definizione d'uso' del funtore $\varepsilon$: la sua 'interpretazione pre-stabilita', presupposto anti-formalista di qualunque teoria deduttiva elaborata da Leśniewski (cfr. § 1).

La presentazione di $\varepsilon$ consente di introdurre due considerazioni, che saranno approfondite nel prossimo capitolo:

- Dalle condizioni di verità sopra enunciate, è lecito affermare che $\varepsilon$ occupa un valore teoretico di primo piano, in quanto esplicita le presupposizioni di esistenza della formula di cui è funtore principale. Tramite $\varepsilon$, è possibile *definire* l'esistenza (vd. § 2.2.1), in almeno tre modi differenti. D'altro canto,

[13]Per inciso, Leśniewski non formalizzò alcuna interpretazione dei suoi sistemi logici, fatta eccezione per la teoria delle categorie semantiche. I tentativi di fornire una semantica a modelli per l'*Ontologia* sono posteriori, riconducibili ad una attitudine 'meta-logica' che non fu propria dell'autore. Piuttosto, come Russell e Frege, egli era interessato ad indagini '(intra-)logiche', ovvero alla costruzione di sistemi formali con sufficienti risorse espressive per sviluppare certe teorie fondazionali o posizioni filosofiche.

i quantificatori dell'*Ontologia* non sono indicatori dell'impegno ontologico del sistema, in quanto i valori delle variabili sono espressioni linguistiche e non oggetti. Su questo aspetto si tornerà più diffusamente nel paragrafo 2.2.1.

- Ancora una volta, è importante rimarcare che il linguaggio dell'*Ontologia* non opera alcuna suddivisione tra i nomi in base all'estensione.

  La verità o falsità di un'espressione della forma $a \varepsilon A$ non viene in alcun modo semanticamente pre-determinata; anzi, è proprietà peculiare di ogni teorema dell'*Ontologia* di rimanere vero nel suo complesso, qualunque estensione venga assegnata ai nomi che vi compaiono. Si noti che questo vale anche nel caso che ciascun nome sia considerato vuoto, e dunque ogni sottoformula $a \varepsilon A$ sia falsa.

  Pertante le tesi dell'*Ontologia* sono 'tautologiche in senso profondo' - la sensatezza dell'espressione non deriva dall'avere i suoi termini o meno una denotazione, ma esclusivamente dai requisiti di buona formazione categoriale prescritti dalle *direttive*.

  Su questo importante aspetto si tornerà, quando saranno state trattate le direttive per l'introduzione di definizione (vd. § 2.1).

## 1.4 Una nuova teoria della definizione

Alla luce delle peculiarità dei sistemi di Leśniewski fino ad ora presentate, una revisione della definizione in logica non è solo plausibile, ma addirittura necessaria.

Infatti, senza definizioni l'espressività del sistema è bloccata allo stadio iniziale. Questo dato non è allarmante in un contesto classico, dove si presuppone fin dal principio un calcolo logico dato in astratto, già composto da un linguaggio predefinito e un insieme infinito di teoremi. Ma in un contesto inscrizionale, dove le risorse espressive (costanti logiche definite, categorie semantiche presenti) e il numero di teoremi dimostrati sono sempre attualmente in numero finito, è necessario pensare un qualche meccanismo che consenta al sistema di implementare l'infinito potenziale, di modo che la sua capacità espressiva possa risultare soddisfacente. Questo meccanismo è la definizione: essa introduce nuove costanti logiche, nuove categorie semantiche, e nuove tesi al sistema. Anche se che questi tre insiemi sono sempre finiti relativamente ad un certo stadio di derivazione, essi possono essere incrementati in maniera potenzialmente infinita.

### 1.4.1 Definizioni esterne

Prima di approfondire il trattamento delle definizioni nell'opera di Leśniewski, è bene ricordare quali furono i suoi immediati antecedenti, nonché termini di confronto.

Un autore che non può non aver influenzato Leśniewski è Frege. Nella sua fondazione dell'aritmetica[14], Frege dedica un certo spazio a caratterizzare i 'principi del definire': i canoni ai quali attenersi nel formulare definizioni. Chi invece non

[14][Frege 1893].

mostra analogo rigore sono Russell e Whitehead. Il trattamento che la definizione riceve nei PM è sintomatico di una certa concezione delle definizioni, che rimarrà prevalente sul modello Frege-Leśniewski tra i logici del $XX^o$ secolo.

I *Principia* dedicano alle definizioni due soli paragrafi - nell'introduzione del primo dei tre volumi redatti da Russell e Whitehead. La loro sintassi ed il loro significato non ricevono una chiarificazione precisa e sistematica, ma vengono lasciati all'intuizione extra-formale del lettore. Questa omissione è una precisa scelta concettuale, esplicitata dallo stesso Russell:

> [...] the definitions are no part of our subject, but are, strictly speaking, mere typographical conveniences. Practically, of course, if we introduced no definitions, our formulae would very soon become so lengthy as to be unmanageable; but theoretically, all definitions are superfluous[15].

Per l'autore, le definizioni non sono altro che comodità di scrittura, regole di abbreviazione meta-linguistiche che non influiscono in alcun modo sulle capacità espressive del sistema formale. Per esempio, la definizione dell'implicazione è espressa in un non meglio precisato meta-linguaggio, di cui fa parte il segno $=_{def}$:

$$\alpha \rightarrow \beta =_{def} \neg\alpha \vee \beta \tag{1.2}$$

Si tratta di una definizione esterna al sistema logico, in quanto non introduce alcun nuovo simbolo nel linguaggio oggetto. Infatti, un'espressione contenete $\rightarrow$ non è propriamente una formula ben formata del sistema, ma solo una conveniente abbreviazione dell'espressione con i primitivi $\neg$ e $\vee$. Posto questo, come interpretare una definizione di Russell? Esplicita uno stato mentale dell'autore? Determina una regola di sostituzione per un certo simbolo del sistema logico (inteso non come *token*, ma come *type*)? Quante e quali sono le definizioni accettate, è possibile aggiungerne altre, e a quali condizioni? Qual è lo *status* logico del simbolo $=_{def}$?

### 1.4.2 Dalle definizioni esterne alle definizioni interne

Nella prospettiva di Leśniewski, la collocazione delle definizioni all'interno del sistema logico risponde innanzitutto all'esigenza di chiarificare le questioni sopra sollevate. La prima di queste riguarda il linguaggio nel quale sono scritte le asserzioni di definizione. Si pone dunque il problema di interpretare nel linguaggio oggetto della teoria logica il simbolo di definizione adottato, ad esempio, da Russell: $=_{def}$.

La scelta di Leśniewski non consiste nel proporre un nuovo segno, con caratteristiche speciali, ma di assegnare un nuovo ruolo alla doppia implicazione proposizionale $\equiv$ ( scritta anche come $\Longleftrightarrow$). Le ragioni risiedono nel fatto che questo connettivo, già presente nel calcolo proposizionale classico, possiede due 'buone' proprietà.

[15][Russell, Whitehead 1910], I, p.11.

- Dal punto di vista delle categorie semantiche, è plausibile assegnare ad $\equiv$ la categoria S/SS. Infatti prende come argomenti due proposizioni, e ne restituisce una come valore.

- Un enunciato che abbia $\equiv$ come connettivo principale risulta vero nel caso in cui le due sotto-formule a cui si applica siano entrambe vere oppure entrambe false.

La prima proprietà consente alle definizioni di essere *proposizioni*: se $\equiv$ è il funtore principale, S è l'indice categoriale complessivo.

La seconda proprietà garantisce la verità di una definizione, se *definiendum* (l'espressione definita) e *definiens* (l'espressione che definisce) sono concordi nel valore di verità[16] . Nell'ottica di Russell, parlare di verità o falsità di una definizione non ha senso: si tratta di convenzioni, stipulate in modo arbitrario. Leśniewski ritiene invece che l'accostamento tra *definiendum* e *definiens* debbano rispondere, intuitivamente, ad un criterio di adeguatezza.

Leśniewski sceglie $\equiv$ come unico funtore primitivo del sistema logico più basilare, la *Prototetica*. Per quanto si è detto sui presupposti filosofici che guidano la costruzione dei suoi sistemi deduttivi - *l'interpretazione insieme alla formalizzazione* - si tratta di una ulteriore prova del valore concettuale che Leśniewski attribuiva alle definizioni, come fulcro e fondazione di una teoria logica.

$$(\forall pq)((p \equiv q) \equiv (\forall f)(f(pf(p(\forall u)(u))) \equiv (\forall r)(f(qr) \equiv (q \equiv p)))) \tag{1.3}$$

(1.3) è la più breve formula conosciuta che possa fungere da unico assioma di un sistema di *Prototetica*, fondato su $\equiv$ come unico simbolo primitivo non definito[17]. Le categorie semantiche rappresentate allo stadio iniziale del sistema sono dunque S/SS (la categoria di $\equiv$ e della variabile $f$) e S. Se $\equiv$ è l'unico funtore presente nell'assioma, tutti gli altri connettivi del calcolo proposizionale classico - $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ - possono essere definiti in termini di esso. Questo sorprendente risultato fu ottenuto da A. Tarski, mentre era allievo di dottorato di Leśniewski[18]. In particolare, egli mostrò come fosse possibile definire la congiunzione proposizionale in termini della doppia implicazione, qualora fosse stato possibile quantificare su

[16] La nozione di verità in rapporto ai sistemi logici di Leśniewski non è stata specificata, in quanto lo stesso autore non ne fornisce una formalizzazione. Come già accennato, egli non era interessato ad indagini meta-logiche e non fornì alcun concetto semantico che non fosse la teoria delle categorie. La verità a cui si fa riferimento è quella 'intuitiva', per cui Leśniewski riteneva veri gli enunciati dell'*Ontologia* in quanto il sistema era costruito in accordo con le proprie posizioni filosofiche. Una nozione di verità rispetto ad un modello verrà invece presentata nel terzo capitolo; si tratta comunque di un apparato formale introdotto a posteriori, del quale Leśniewski probabilmente non avrebbe sentito la necessità.

[17] A rigore, l'assioma include anche il quantificatore universale - tuttavia, per Leśniewski, i quantificatori sono sincategoremi, il cui unico scopo è separare i termini variabili da quelli costanti. Per una disamina più approfondita di questo punto, cfr. [MIÈVILLE 2004], p.28. Per un approfondimento sulla ricerca dell'assioma più breve per la *Prototetica*, cfr. [SOBOCINSKI 1960]. Lo stesso Sobocinski è colui che ha scoperto l'assioma nella forma di (1.3) nel 1945.

[18] cfr. [LEŚNIEWSKI 1992], p.419.

variabili funtoriali.

$$(\forall pq)((p \wedge q) \equiv ((\forall \phi)(p \equiv ((\forall r)(p \equiv \phi(r)) \equiv (\forall r)(q \equiv \phi(r)))))) \qquad (1.4)$$

Per riassumere, il quadro che si delinea è il seguente: le definizioni sono formule di indice categoriale S, che esprimono una relazione tra un *Definiens* e un *Definiendum*. Il funtore principale delle definizioni è $\equiv$, unico termine primitivo del sistema logico della *Prototetica*. In questo senso è possibile sostenere che la *Prototetica* e la sua estensione *Ontologia* sono sistemi logici fondati sulla definizione. Questa affermazione necessita però di una ulteriore specificazione. Infatti, perché le definizioni possano rientrare a pieno diritto tra i teoremi di un sistema logico, devono preservarne la consistenza. La presentazione dei vincoli elaborati di Leśniewski per l'introduzione di definizione sarà l'argomento del prossimo capitolo.

# Capitolo 2

# Definizioni nell'*Ontologia*

A giudizio di diversi autori[1], Leśniewski è stato il logico che più di ogni altro ha prestato attenzione nel precisare a quali condizioni di correttezza devono sottostare le definizioni.

Tali condizioni sono espresse sotto forma di *direttiva*, alla stregua delle altre direttive formulate da Leśniewski per i propri sistemi logici. Queste ultime non saranno approfondite, in quanto propongono regole di inferenza ben note già in ambito di logica predicativa classica, quali ad esempio la distribuzione dei quantificatori, la sostituzione uniforme ed il *modus ponens*[2].

Le direttive per l'introduzione di definizione verranno invece esaminate nel dettaglio. La prima direttiva esprime le condizioni per la definizione di funtori a valore proposizionale e guida l'espansione di un sistema di *Prototetica*. Nel passaggio all'*Ontologia*, a questa si affianca una seconda direttiva, che regola l'introduzione di definizioni per termini della categoria dei funtori a valore nominale.

Le direttive originali di Leśniewski sono scritte con meticolosa attenzione nel fare riferimento ai soli tratti puramente estensionali dei segni. Ad esempio, anziché "il funtore $\varepsilon$", Leśniewski usa scrivere "il segno equiforme a quello in quinta posizione nell'assioma dell'*Ontologia*". Inoltre, ciascuna direttiva è relativizzata allo stadio di sviluppo del sistema costruttivamente raggiunto in un dato momento. Per ragioni di semplicità espressiva, enuncerò le direttive prescindendo, almeno in parte, da tali accorgimenti, che pure sono di importanza fondamentale e dimostrano ancora una volta la coerenza ed il rigore nominalista dell'autore.

## 2.1 Direttive per le definizioni nell'*Ontologia*

Esistono diverse rivisitazioni delle direttive per la definizione originariamente presentate da Leśniewski. Ho scelto di seguire [Luschei 1962], ma soprattutto

[1] Ad esempio i già citati [Luschei 1962], p.36 e [Rogers 1971], p.95 n.5.

[2] A queste si aggiunge una direttiva detta *di estensionalità*. Tale direttiva consente l'introduzione nel sistema di tesi che asseriscono l'equiestensionalità di funtori della medesima categoria semantica. Si tratta di una regola di inferenza peculiare dei sistemi di Leśniewski, volta a preservarne il carattere estensionale quando, nel corso della derivazione, vengono introdotti per definizione termini di nuove categorie semantiche. Il tema non verrà approfondito in questa sede - per i dettagli formali, cfr. [Mièville 2004], pp.91-95.

[MIÈVILLE 2004], il quale costituisce, a mio parere, il miglior testo introduttivo sull'argomento.

Le definizioni dell'*Ontologia* sono dette *ontologiche*, per distinguerle dalle definizioni della *Prototetica*, le quali chiameremo definizioni *prototetiche*. Le definizioni *ontologiche* possono essere di tipo *nominale*, se il termine definito è della categoria dei nomi oppure un funtore che ha un valore di categoria N. Altrimenti, esse sono dette di tipo *proposizionale*, se definiscono una costante proposizionale oppure un funtore di valore S.

Le direttive per le definizioni consentono di introdurre nuove tesi, ad un certo stadio di sviluppo $\sigma$ di un sistema di *Ontologia*, il quale presenta i seguenti requisiti minimi di espressività:

- L'insieme $\Theta_\sigma$ delle tesi derivate nel sistema comprende l'assioma della *Prototetica* (1.3) e dell'*Ontologia* (2.4) - si ricordi che qualsiasi sistema di *Ontologia* presuppone come base un sistema di *Prototetica* giunto ad un qualche stadio di sviluppo.

- L'insieme $\Lambda_\sigma$ delle costanti logiche comprende $\equiv$ di categoria S/SS (introdotto congiuntamente all'assioma della *Prototetica*), $\neg$ di categoria S/S, $\wedge$ e $\rightarrow$ di categoria S/SS (introdotti per definizione nella *Prototetica*), $\varepsilon$ di categoria S/NN (introdotto insieme all'assioma dell'*Ontologia*).

- L'insieme $\Sigma_\sigma$ delle categorie semantiche presenti nel sistema comprende S, S/S, S/SS (introdotte nella *Prototetica*), N, S/NN (introdotte con l'assioma dell'*Ontologia*).

### 2.1.1 Direttiva per le definizioni ontologiche di tipo proposizionale

Sia $\Gamma$ un sistema di *Ontologia* ad un certo stadio di sviluppo $\sigma$, conforme ai requisiti di espressività sopra specificati. È possibile inscrivere come tesi in $\Gamma$ una definizione ontologica di tipo proposizionale A, rispetto ad un'ultima tesi inscritta B, se e solo se tutte le condizioni seguenti sono soddisfatte:

1. A è una espressione vincolata da un quantificatore universale più esterno.

$$(\forall \ldots)(\ldots)$$

2. Il funtore principale di A è la costante già definita $\equiv$ di categoria S/SS.

$$(\forall \ldots)(- \ \equiv \ -)$$

3. Il primo degli argomenti di $\equiv$ è il *definiendum*. Esso prende la forma di una costante logica $\tau$, non equiforme ad alcuna costante logica della *medesima categoria semantica* precedentemente introdotta nel sistema.

$$(\forall \ldots)(\tau \ \equiv \ -))$$

4. $\tau$ è un esponente della categoria semantica dei funtori di valore proposizionale, avente k termini variabili come argomenti, dove il primo è della categoria $c_0$, il secondo della categoria $c_1$, ..., l'ultimo della categoria $c_k$. La categoria semantica del termine definito sarà $S/c_0, c_1, \ldots, c_k$ (se k=0, $\tau$ sarà di categoria S)[3].

5. Ognuno dei k termini variabili è equiforme ad un segno inscritto nell'ambito del quantificatore universale - in altre parole, ogni variabile del *definiendum* è vincolata dal quantificatore principale.

$$(\forall v_0 \ldots v_k)(\tau(v_0 \ldots v_k) \;\equiv\; -))$$

6. Non deve vigere alcuna relazione di equiformità tra i segni grafici del *definiendum*. I termini variabili che compaiono nella definizione devono essere compatibili con lo stadio attuale del sistema $\Gamma$, cioè la loro categoria semantica deve già avere un rappresentante tra le costanti logiche precedentemente definite - $c_0, c_1, \ldots, c_k \;\in\; \Sigma_\sigma$.

7. Il *definiens* è un'espressione retta da un funtore principale, di indice categoriale S, eventualmente chiusa da un quantificatore. La sua struttura è conforme alla capacità espressiva $\sigma$ del sistema $\Gamma$ relativa all'ultima tesi inscritta B, quanto a termini costanti e categorie semantiche presenti.

$$(\forall v_0 \ldots v_k)(\tau(v_0 \ldots v_k) \;\equiv\; \varphi))$$

8. Non deve vigere alcuna relazione di equiformità tra i segni grafici del *definiendum* - in altre parole, nessun segno deve essere ripetuto. Inoltre i termini variabili liberi $v_0 \ldots v_k$ del *definiendum* devono avere tutti un segno di uguale forma nel *definiens*, e viceversa.

$$(\forall v_0 \ldots v_k)(\tau(v_0 \ldots v_k) \;\equiv\; \varphi(v_0 \ldots v_k)))$$

Ipotizzando una applicazione della direttiva di definizione allo stadio $\sigma$ in $\Gamma$, l'espressività del sistema allo stadio $\sigma + 1$ ne risulta così modificata:

- L'insieme $\Theta_{\sigma+1}$ delle tesi derivate nel sistema comprende una ulteriore tesi A, che diventa l'ultima tesi derivata fino a quel punto nel sistema.
- L'insieme $\Lambda_{\sigma+1}$ delle costanti logiche comprende ora $\tau$.
- Se non già presente, l'insieme $\Sigma_{\sigma+1}$ delle categorie semantiche presenti nel sistema comprende ora $S/c_0, c_1, \ldots, c_k$.

[3] $\tau$ può anche essere definito come funtore parametrico. In questo caso i k argomenti sono distribuiti tra più contesti di parentesi, i quali rappresentano la possibilità di assegnare un valore a blocchi di variabili in momenti differenti. Ad esempio:

$$(\forall v_0 \ldots v_m \ldots v_n \ldots v_k)(\tau(v_0 \ldots v_m)\{v_{m+1} \ldots v_n\}[v_{n+1} \ldots v_k] \;\equiv\; -))$$

### 2.1.2 Direttiva per le definizioni ontologiche di tipo nominale

Sia $\Gamma$ un sistema di *Ontologia* ad un certo stadio di sviluppo $\sigma$, conforme ai requisiti di espressività sopra specificati. È possibile inscrivere come tesi in $\Gamma$ una definizione ontologica di tipo ontologico A, rispetto ad un'ultima tesi inscritta B, se e solo se tutte le condizioni seguenti sono soddisfatte:

1. A è una espressione vincolata da un quantificatore universale più esterno.

$$(\forall \dots)(\dots)$$

2. Il funtore principale di A è la costante già definita $\equiv$ di categoria S/SS.

$$(\forall \dots)(- \ \equiv \ -)$$

3. Il primo degli argomenti di $\equiv$ è il *definiendum*. Esso prende la forma di un'espressione retta dal funtore costante già definito $\varepsilon$ di categoria S/NN.

$$(\forall a)(- \, \varepsilon - \ \equiv \ -))$$

4. Il primo argomento di $\varepsilon$ è un termine variabile di categoria N.

$$(\forall a)(a \, \varepsilon - \ \equiv \ -))$$

5. Il secondo argomento di $\varepsilon$ è la costante definita $\tau$, che non deve essere equiforme ad alcuna costante logica della *medesima categoria semantica* precedentemente introdotta nel sistema.

$$(\forall a)(a \, \varepsilon \, \tau \ \equiv \ -))$$

6. $\tau$ è un esponente della categoria semantica dei funtori a valore nominale, avente k termini variabili come argomenti, dove il primo è della categoria $c_0$, il secondo della categoria $c_1$, ..., l'ultimo della categoria $c_k$. La categoria semantica del termine definito sarà N/$c_0, c_1, \dots, c_k$ (se k=0, $\tau$ sarà di categoria N)[4].

7. Ognuno dei k termini variabili è equiforme ad un segno inscritto nell'ambito del quantificatore universale - in altre parole, ogni variabile del *definiendum* è vincolata dal quantificatore principale.

$$(\forall a v_0 \dots v_k)(a \, \varepsilon \, \tau(v_0 \dots v_k) \ \equiv \ -)$$

8. Non deve vigere alcuna relazione di equiformità tra i segni grafici del *definiendum*. I termini variabili che compaiono nella definizione devono essere compatibili con lo stadio attuale del sistema $\Gamma$, cioè la loro categoria semantica deve già avere un rappresentante tra le costanti logiche precedentemente definite - $c_0, c_1, \dots, c_k \ \in \ \Sigma_\sigma$.

[4] $\tau$ può anche essere definito come funtore parametrico - cfr. nota precedente.

9. Il *definiens* è un'espressione retta dal funtore costante già definito $\wedge$ di categoria S/SS.

$$(\forall a v_0 \dots v_k)(a \,\varepsilon\, \tau(v_0 \dots v_k) \;\equiv\; (- \wedge -))$$

10. Il primo argomento di $\wedge$ è un'espressione della forma $a \,\varepsilon\, a$, dove $a$ è un termine variabile equiforme al primo argomento del funtore principale del *definiens*.

$$(\forall a v_0 \dots v_k)(a \,\varepsilon\, \tau(v_0 \dots v_k) \;\equiv\; (a \,\varepsilon\, a \wedge -))$$

11. Il secondo argomento di $\wedge$ è una espressione retta da un funtore principale, di indice categoriale S, eventualmente chiusa da un quantificatore. La sua struttura è conforme alla capacità espressiva $\sigma$ del sistema $\Gamma$ relativa all'ultima tesi inscritta B, quanto a termini costanti e categorie semantiche presenti.

$$(\forall a v_0 \dots v_k)(a \,\varepsilon\, \tau(v_0 \dots v_k) \;\equiv\; (a \,\varepsilon\, a \wedge \varphi))$$

12. Non deve vigere alcuna relazione di equiformità tra i segni grafici del *definiendum* - in altre parole, nessun segno deve essere ripetuto. Inoltre i termini variabili liberi $v_0 \dots v_k$ del *definiendum* devono avere tutti un segno di uguale forma nel *definiens*, e viceversa.

$$(\forall a v_0 \dots v_k)(a \,\varepsilon\, \tau(v_0 \dots v_k) \;\equiv\; (a \,\varepsilon\, a \wedge \varphi(v_0 \dots v_k)))$$

Per l'espressività del sistema allo stadio di sviluppo $\sigma + 1$ valgono le considerazioni fatte per la direttiva relativa alle definizioni di tipo proposizionale.

**Traslabilità** In accordo con l'attitudine estensionalista di Leśniewski, l'introduzione di definizione comporta che *definiens* e *definiendum* siano equivalenti ed inter-sostituibili in qualunque contesto.

In altri termini, sia le definizioni di tipo nominale che proposizionale soddisfano la condizione di traslabilità: per ogni teorema T inscritto nell'*Ontologia* ad uno stadio $\sigma{+}n$, contenente il termine definito $\tau$, è sempre possibile derivare un teorema T' dove $\tau$ è rimpiazzato dal suo *definiens*.

Le definizioni hanno questa proprietà in quanto per ogni categoria semantica attualmente presente nel sistema è possibile introdurre una relativa tesi di estensionalità (cfr. nota 2).

Per una disamina dettagliata del rapporto tra direttiva di estensionalità e traslabilità delle definizioni rimando a [LUSCHEI 1962], pp.262-265.

In questa sede, mi limito a proporre quello che penso essere un possibile schema generale di derivazione (che coinvolge meta-variabili e non fa parte di nessuna *Ontologia*) da una tesi T contenente un termine definito $\tau$ ad una tesi T' equivalente che non lo contiene ($D.dum = definiendum$ per $\tau$, $D.ens = definiens$ per $\tau$):

$$\dfrac{T(D.dum(\tau)) \qquad \dfrac{\dfrac{[D.dum(\tau) \equiv D.ens]^{def^{\tau}} \qquad \dfrac{[(\forall pq)(p \equiv q) \equiv (\forall f)(f(p) \equiv f(q))]^{tesi-ext}}{(D.dum(\tau) \equiv D.ens) \equiv (\forall f)(f(D.dum(\tau)) \equiv f(D.ens))}\,El.\forall}{(\forall f)(f(D.dum(\tau)) \equiv f(D.ens))}\,MP}{T(D.dum(\tau)) \equiv T(D.ens)}\,El.\forall}{T(D.ens)}\,MP$$

**Neutralità ontologica** In ogni definizione di costante nominale, una sotto-formula $a \, \varepsilon \, \phi$ nel *definiendum* è bilanciata da una sotto-formula $a \, \varepsilon \, a$ nel *definiens*. Tale simmetria ha lo scopo di mantenere qualsiasi asserto esistenziale su un piano meramente *ipotetico*, prescindendo così da presupposizioni di esistenza rispetto agli oggetti nominati.

A riprova di ciò, si consideri ora di assegnare ad $a$ una estensione vuota: la presenza della medesima "condizione di esistenza" in entrambi i termini della definizione li renderà falsi allo stesso tempo. Poiché il funtore principale è $\equiv$, l'enunciato nel suo complesso risulterà comunque vero.

Questa soluzione tecnica consente inoltre di annullare ogni distinzione categoriale tra nomi per un solo individuo, nomi per più individui e nomi senza denotazione. Infatti, ogni nome dell'*Ontologia* può essere interpretato intuitivamente nei tre modi differenti, senza formulare alcuna presupposizione di esistenza sull'universo di discorso, che può anche essere vuoto. L'assioma, le definizioni, e ciascuna loro conseguenza logica preservano questa neutralità, grazie al suddetto bilanciamento delle asserzioni di esistenza.

In virtù di questi accorgimenti formali, è inoltre possibile trattare nell'*Ontologia* nomi che potremmo dire "contraddittori", senza che il sistema ne risulti a sua volta inconsistente. Nello specifico, mi riferisco alla seguente definizione, che introduce una costante per il "nome vuoto" o "nome contraddittorio".

$$(\forall a)(a \, \varepsilon \, \bigwedge) \equiv (a \, \varepsilon \, a) \land \neg(a \, \varepsilon \, a) \tag{2.1}$$

È importante notare che senza la clausola di esistenza posta al *definiens*, la suddetta definizione potrebbe essere espressa nel seguente modo:

$$(\forall a)(a \, \varepsilon \, \bigwedge) \equiv \neg(a \, \varepsilon \, a) \tag{2.2}$$

Da cui sarebbe derivabile la contraddizione:

$$(\bigwedge \varepsilon \bigwedge) \equiv \neg(\bigwedge \varepsilon \bigwedge) \tag{2.3}$$

In conclusione, un sistema di *Ontologia* è in grado di esprimere teoremi che coinvolgano asserzioni di esistenza, prescindendo dalla cardinalità e dalla struttura dell'universo di discorso di riferimento. Si tratta perciò di una (forse della prima) "logica libera", in un senso molto forte.

## 2.2 Le definizioni come esplicitazione logica di temi filosofici

A partire dalle direttive sopra enunciate, un sistema di *Ontologia* può essere ovviamente sviluppato in molte direzioni differenti. Una strada è quella di definire i numeri naturali e le operazioni dell'aritmetica, andando in direzione di una ricostruzione della teoria dei numeri finitaria[5].

La via che invece ho scelto di seguire in questa introduzione consiste nell'analisi, per mezzo delle definizioni, di alcuni concetti della tradizione filosofica, con particolare riguardo alle tematiche ontologiche di derivazione aristotelico-medievale.

[5] Si veda ad esempio la prima parte di [Canty 1967].

### 2.2.1 Gradi di esistenza

#### L'assioma dell'*Ontologia*

Per quanto si è affermato, nel sistema logico dell'*Ontologia* le asserzioni di esistenza sono legate alla relazione dei nomi con il funtore $\varepsilon$.

Riprendiamo le condizioni di verità di un'espressione del genere $a\,\varepsilon\,A$, analizzando in modo formale quanto detto prima informalmente. Tali condizioni sono espresse nell'unico assioma dell'*Ontologia*, che ha la forma di una definizione del funtore $\varepsilon$.

$$\begin{aligned}(\forall Ab)((A\,\varepsilon\,b) \equiv ((\exists B)(B\,\varepsilon\,A) \wedge (\forall DC)(((D\,\varepsilon\,A) \wedge \\ (C\,\varepsilon\,A)) \rightarrow (D\,\varepsilon\,C) \wedge (\forall D)((D\,\varepsilon\,A) \rightarrow (D\,\varepsilon\,b))))\end{aligned} \tag{2.4}$$

Si tratta di una definizione 'operativa', o implicita, perché il termine definito compare sia nel *definiens* che nel *definiendum*. Si osservi che in base alle direttive, se non fosse un assioma, questa espressione non potrebbe essere una tesi valida del sistema logico.

Il *definiens* è composto di tre congiunti: si tratta delle condizioni che l'espressione $(A\,\varepsilon\,b)$ deve soddisfare per essere vera.

$$(\forall Ab)((A\,\varepsilon\,b) \equiv ((\exists B)(B\,\varepsilon\,A)...$$

La prima condizione è che ci sia almeno un nome che nomini l'oggetto chiamato $A$. In altri termini, $A$ non può avere estensione nulla, dunque deve essere nome di almeno un individuo.

$$... \wedge (\forall DC)(((D\,\varepsilon\,A) \wedge (C\,\varepsilon\,A)) \rightarrow (D\,\varepsilon\,C)$$

La seconda condizione esprime il fatto che due nomi qualsiasi, la cui estensione sia inclusa in $A$, hanno la medesima estensione. Dunque l'estensione di $A$ non può essere maggiore di un individuo. Unendo le prime due condizioni, otteniamo che il nome $A$ deve avere come estensione almeno e al massimo un individuo.

$$... \wedge (\forall D)((D\,\varepsilon\,A) \rightarrow (D\,\varepsilon\,b))$$

L'ultimo segmento esprime la condizione che *tutto* $A$ sia anche $b$. Infatti, ogni nome $D$ che sia $A$ è anche $b$. Riprendendo le tre condizioni: $A\,\varepsilon\,b$ se e solo se $A$ è un nome proprio, $b$ è un nome proprio oppure un nome comune, e tutto ció che ha nome $A$ ha anche nome $b$.

L'assioma ha anche una forma abbreviata, che può fungere a sua volta da tesi iniziale dell'*Ontologia*. L'assioma breve esprime le medesime condizioni riguardo a $\varepsilon$, in modo più sintetico:

$$(\forall Ab)((A\,\varepsilon\,b) \equiv (\exists C)((A\,\varepsilon\,C) \wedge (C\,\varepsilon\,b))) \tag{2.5}$$

### Funtori di esistenza

Sulla base delle condizioni espresse dall'assioma, è possibile servirsi di $\varepsilon$ per definire dei funtori di esistenza alternativi, che ne riprendano solo alcune condizioni. Su questa linea di sviluppo per mezzo di definizioni, l'*Ontologia* può esprimere una molteplicità di sfumature, veri e propri 'gradi di esistenza'.

### Primo funtore di esistenza

$$(\forall a)((ex_1(a)) \equiv (\exists b)(b\,\varepsilon\, a)) \tag{2.6}$$

L'estensione di $a$ è non vuota: il funtore $ex_1$, di categoria S/S, riprende la prima sotto condizione dell'assioma.

### Secondo funtore di esistenza

$$(\forall a)((ex_2(a)) \equiv (\forall bc)((b\,\varepsilon\, a) \wedge (c\,\varepsilon\, a) \rightarrow (b\,\varepsilon\, c))) \tag{2.7}$$

Leggiamo $ex_2(a)$ come: "esiste al massimo un a". Si noti come questo grado di esistenza sia più debole del precedente: $a$ 'esiste' in questo secondo senso anche se la sua estensione è vuota (ad esempio, $ex_2(Pegaso)$).

### Terzo funtore di esistenza

$$(\forall a)((ex_3(a)) \equiv (\exists b)(a\,\varepsilon\, b)) \tag{2.8}$$

$ex_3(a)$ rispecchia la denotazione delle costanti individuali della logica classica. Infatti, trovandosi $a$ alla sinistra di $\varepsilon$ nel *definiens*, la condizione espressa è che la sua estensione sia esattamente un individuo.

**Il ruolo dei quantificatori** Con l'ausilio dei termini definiti in (2.6) e (2.1), è derivabile un interessante teorema, di cui fornisco una dimostrazione semplificata in deduzione naturale[6]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall b)((b\,\varepsilon\, \bigwedge) \equiv ((b\,\varepsilon\, b) \wedge \neg(b\,\varepsilon\, b)))]^{def \bigwedge}}{(\forall b)((b\,\varepsilon\, \bigwedge) \equiv \bot)}}{(\forall b)\neg(b\,\varepsilon\, \bigwedge)}\,Int.\neg}{\neg(\exists b)(b\,\varepsilon\, \bigwedge)}\,\exists\backslash\forall}{(\exists a)\neg(\exists b)(b\,\varepsilon\, a)}\,Int.\exists}{\neg(\forall a)(\exists b)(b\,\varepsilon\, a)}\,\forall\backslash\exists \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall a)((ex_1(a)) \equiv (\exists b)(b\varepsilon a))]^{def.ex_1}}{(\forall a)(ex_1(a)) \equiv (\forall a)(\exists b)(b\varepsilon a)}\,distrib.\forall}{(\forall a)(ex_1(a)) \rightarrow (\forall a)(\exists b)(b\,\varepsilon\, a)}\,\rightarrow\backslash\equiv \qquad [(\forall a)(ex_1(a))]^1}{(\forall a)(\exists b)(b\,\varepsilon\, a)}\,MP}{\bot}}{\neg(\forall a)(ex_1(a))}\,(1)}{(\exists a)\neg(ex_1(a))}\,\exists\backslash\forall$$

[6] Nonostante Leśniewski avesse formulato direttive per l'inferenza nei suoi sistemi logici, egli stesso era solito fare dimostrazioni servendosi di una procedura più agevole, prossima alla deduzione naturale. In analogia con altri autori della letteratura su Leśniewski (ad esempio [Slupecki 1955], pp.76-79 e [Mièville 2004], p.97 e p.106) mi servirò di questo formalismo quando sarà opportuno mostrare la derivazione di teoremi dell'*Ontologia*.

Il teorema $(\exists a)\neg(ex_1(a))$ ci fornisce una prospettiva interessante riguardo l'interpretazione dei quantificatori nell'*Ontologia*.

Secondo il noto criterio di Quine, la quantificazione è una spia delle presupposizioni di esistenza di un sistema logico:

> In general, entities of a given sort are assumed by a theory if and only if some of them must be counted among the values of the variables in order that the statements affirmed in the theory be true[7]

Poiché Leśniewski non pone restrizioni (di categoria semantica) al valore delle variabili su cui è possibile quantificare, seguire Quine significherebbe ammettere che l'*Ontologia* è di gran lunga il sistema logico più compromesso esistenzialmente tra tutti quelli in circolazione. Ma a differenza di Quine, i valori delle variabili per Leśniewski non sono oggetti del dominio, bensí espressioni linguistiche[8]. Per la precisione: un quantificatore vincola un testimone di una certa categoria semantica, il cui ruolo è indicare che quanto segue nell'ambito di quantificazione vale per qualsiasi (o per almeno un) sostituto della stessa categoria. Questa interpretazione è supportata dal fatto che la nozione stessa di 'sostituto' discende dalla separazione dei segni in base alla categoria semantica[9].

In virtù di questo, una lettura 'esistenziale' del teorema $(\exists a)\neg(ex_1(a))$ è scorretta. Se i valori delle variabili vincolate fossero *oggetti*, il suo enunciato si potrebbe tradurre come "esiste un individuo che non esiste". Invece, $\exists$ non intende asserire l'esistenza di un oggetto di nome $a$; specifica che quanto segue nel suo ambito riguarda almeno un rappresentante della categoria semantica dei *nomi*.

Dunque la lettura proposta per l'espressione è: "per almeno un rappresentante della categoria semantica di cui fa parte il segno $a$ in questo contesto (N), di esso si predica $\neg(ex_1(-))$".

Il teorema asserisce che "c'è almeno un nome vuoto". Oltre a non portare alcun impegno rispetto all'esistenza di individui (o peggio, paradossi come "esiste qualcosa che non esiste"), l'enunciato esprime il fatto che almeno un rappresentante della categoria semantica dei nomi ha estensione vuota. Per inciso, tale nome è proprio $\bigwedge$: questa costante, oppure una analoga, deve essere introdotta per definizione affinché il teorema sia derivabile. Abbiamo dunque un primo esempio di definizione creativa[10].

---

[7][QUINE 1961], p.103.

[8]E anche qualora siano oggetti del dominio, sono oggetti linguistici, distinti dagli individui. Questa è ad esempio la proposta di [RICKEY 1985], presa in esame nel prossimo capitolo.

[9]Ritengo sia molto importante segnalare al lettore che l'interpretazione dei quantificatori nei sistemi logici di Leśniewski è controversa e oggetto di dibattito ancora oggi. La posizione da me espressa vuole segnalare una certa concordia tra gli autori, da me condivisa, nel negare che la quantificazione sia da intendersi in senso 'oggettuale', cioè prendendo come sostituti delle variabili individui dell'universo di discorso. Dato questo punto fermo, le proposte alternative divergono. Quanto da me scritto intende manifestare affinità con [MIÈVILLE 2004], p.140-142. Tuttavia, lungi dal costituire parola conclusiva sull'argomento, una interpretazione simil-'sostituzionale' mostra il fianco a critiche, come dimostrano ad esempio [KÜNG 1967] e [URBANIAK 2008], pp.248-249. Il mio intento in questa sede è quello di fornire una base di partenza per eventuali approfondimenti.

[10]Sulla dimostrazione della creatività di $def^{\bigwedge}$ si tornerà ampiamente nel prossimo capitolo (§ 3.3.2).

Allo stesso modo dei funtori di esistenza sopra esaminati, è possibile inscrivere nell'*Ontologia* diversi funtori di inclusione e funtori di identità tra estensioni nominali. Per una esposizione panoramica di queste definizioni rimando in particolare a [LEJEWSKI 1958]. Per un approfondimento comparativo tra Quine e Leśniewski rispetto all'impegno ontologico, rimando invece a [LEJEWSKI 1954] e la seconda parte di [MARSONET 1985].

### 2.2.2 Negazione, polisemia e gerarchia di funtori

Così come per l'esistenza, possiamo sviluppare nell'*Ontologia* una vera e propria 'teoria della negazione', che si avvale della flessibilità concessa dalla teoria delle categorie semantiche.

Per prima cosa, riproponiamo mediante definizione la distinzione Aristotelica tra "negazione proposizionale" e "negazione nominale"[11].

Il funtore di negazione proposizionale è della categoria S/S - dove il *definiens* è una versione dell'*ex falsus quodlibet*.

$$(\forall a)(\neg(a) \equiv (a \equiv (\forall b)(b))) \tag{2.9}$$

Il funtore di negazione nominale è invece di categoria N/N.

$$(\forall Ab)((A \,\varepsilon\, \neg(b)) \equiv ((A \,\varepsilon\, A) \wedge \neg(A \,\varepsilon\, b)) \tag{2.10}$$

La possibilità di esprimere in maniera distinta le due negazioni ha una certa rilevanza filosofica. Nello specifico, consente di catturare le sfumature di significato proprie del linguaggio naturale. Si pensi, ad esempio, all'espressione:

$$Il\ Re\ di\ Francia\ e'\ calvo \tag{2.11}$$

Confrontiamo le differenti formalizzazioni che il calcolo dei predicati e l'*Ontologia* offrono di questo enunciato (tabella 2.1).

| **Linguaggio naturale** | **Logica del primo ordine** | ***Ontologia*** |
|---|---|---|
| Il Re di Francia è calvo | c(R) | R $\varepsilon$ c |
| Il Re di Francia non è calvo | $\neg$ c(R) | $\neg$ (R $\varepsilon$ c) |
| Il Re di Francia è non calvo | ? | R $\varepsilon$ $\neg$(c) |

Tabella 2.1: linguaggi a confronto

A partire delle definizioni precedenti, è possibile derivare come teoremi due differenti versioni del principio del terzo escluso:

$$(\forall ab)((a \,\varepsilon\, b) \vee (a \,\varepsilon\, \neg(b))) \tag{2.12}$$

$$(\forall ab)((a \,\varepsilon\, b) \vee (\neg(a \,\varepsilon\, b))) \tag{2.13}$$

Infine, osserviamo come sia possibile sviluppare ulteriormente la nostra teoria della negazione:

$$(\forall \xi)(\neg(\xi) \equiv (\forall ab)(\xi(ab) \equiv (\forall c)(c))) \tag{2.14}$$

[11] ARISTOTELE, *De Interpretazione*, X.

La categoria semantica introdotta è S/(S/NN). Dunque questa negazione riguarda argomenti funtoriali di categoria S/NN. Rispetto ai funtori $\neg$ definiti in precedenza, possiamo affermare che si tratta di una negazione 'di ordine superiore', come attesta anche la quantificazione su $\xi$, testimone della categoria S/NN.

Un aspetto significativo dei sistemi di Leśniewski, conseguenza della loro natura inscrizionale, consiste nella possibilità di servirsi, in maniera non ambigua, di un medesimo segno grafico, ad esempio $\neg$, per definire funtori differenti.

Si intende con questo accorgimento esprimere il fatto che si tratta di funtori dalle caratteristiche affini, portatori di differenti sfumature di significato. Questa polisemia, come già accennato, è un fenomeno frequente nelle lingue naturali, riproducibile solo con difficoltà nei calcoli logici classici. Queste difficoltà trovano una risposta soddisfacente nei sistemi di Leśniewski, in virtù della differente teoria dei tipi (delle categorie) su cui essi si fondano.

Ricordiamo infatti che, a differenza dei tipi logici di Russell, le categorie sono assegnate ai segni esclusivamente in base al *contesto* nel quale essi si trovano: il *numero* e la *categoria* degli argomenti di un funtore appartengono proprio a questo genere di informazioni contestuali.

L'algoritmo di assegnazione può determinare univocamente, in ogni situazione, quale sia la categoria corretta, anche nel caso che il funtore in analisi sia equiforme ad altri di differente categoria semantica. Per fare un esempio, possiamo determinare quando $\neg$ è il funtore definito da (2.10): il fatto che il suo valore ed il suo unico argomento siano a loro volta argomenti di $\varepsilon$ rende possibile distinguerlo dall'equiforme negazione monoargomentale definita in (2.9).

**La forma delle parentesi** Tuttavia, non tutti i casi sono così limpidi. Ad esempio, nella definizione (2.14), a differenza della definizione (2.10), non è possibile determinare univocamente la categoria di $\neg$. Infatti, per come è trascritta la formula, nulla vieta di pensare $a$ e $b$ come variabili proposizionali; dunque $\neg$ potrebbe anche essere di categoria S/(S/SS).

Si rende necessario, a questo proposito, introdurre un'altra peculiarità dei sistemi logici di Leśniewski.

Data la loro natura estensionale, l'unico modo per rimarcare una differenza tra elementi sintattici è servirsi di relazioni di equiformità e difformità. In particolare, i contesi ambigui come (2.14) sono chiarificati nel momento in cui abbiamo cura di differenziare la forma grafica delle parentesi associate ai funtori[12]. Nel corso della trattazione, si è scelto di semplificare questo aspetto dove non strettamente richiesto, al fine di preservare la leggibilità delle formule e non introdurre una quantità eccessiva di nuove nozioni. Tuttavia, questa ulteriore complicazione non si rivela poi tale, se prendiamo l'abitudine di considerare un funtore non in isolamento, ma associato ad un certo contesto grafico di parentesi. Ad esempio, scritto in notazione rigorosa, il primo funtore dell'*Ontologia*, di categoria S/NN, sarebbe $\varepsilon\{--\}$.

[12] Questa convinzione mi è derivata soprattutto dalla lettura di [Mièville 2001] e [Mièville 2004], dove la difformità tra parentesi è rimarcata ed utilizzata in maniera sistematica. Però, che io sappia, non è fatta menzione esplicita di questo aspetto negli autori che si sono occupati in precedenza di Leśniewski.

La forma delle parentesi diventa un ulteriore input contestuale, necessario all'algoritmo di assegnazione per determinare correttamente la categoria semantica di una data espressione.

Alla luce di quanto detto, quando introduciamo per definizione un nuovo funtore, dobbiamo preoccuparci di associare ad esso un contesto di parentesi idoneo. Ancora una volta, questa procedura è da intendersi relativa ad un certo stadio del sistema, nel quale sono stati introdotti determinati contesti di parentesi con proprie forme tipografiche.

Ad esempio, possiamo pensare che lo stato attuale del sistema rispecchi la situazione riassunta nella tabella 2.2.

| **Funtore** | **Contesto di parentesi** | **Categoria** |
|---|---|---|
| $\neg$ | (-) | S/S |
| $\equiv$ | (- -) | S/SS |
| $\wedge$ | (- -) | S/SS |
| $\varepsilon$ | {- -} | S/NN |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots/\ldots$ |

Tabella 2.2: alcuni contesti di parentesi attualmente presenti

Una procedura per associare contesti di parentesi a nuovi funtori definiti potrebbe essere la seguente:

1. Se la categoria semantica del funtore è già presente tra quelle del sistema, allora ad esso verrà associato il medesimo contesto di parentesi associato agli altri rappresentanti della categoria.

2. Altrimenti, se sono già presenti contesti di parentesi con il medesimo numero di posti (argomenti) ma associati a differente categoria, scegliamo un nuovo contesto di parentesi.

3. Altrimenti, la scelta del contesto di parentesi è libera.

Applichiamo quanto esposto al caso della definizione (2.14):

1. La categoria S/(S/NN) non è già presente nel sistema.

2. Sono già presenti contesti di parentesi con il medesimo numero di posti (argomenti) ma associati a differente categoria: ad esempio $(-)$ associato a S/S. Allora scegliamo un contesto di parentesi inedito: $/ - \backslash$.

Alla luce di questo, riscriviamo la definizione (2.14) in una notazione più rigorosa, dove sono rispettati la notazione prefissa e la differente forma grafica delle parentesi. Riscriviamo anche i quantificatori come 'delimitatori' sincategorematici (sintassi: $\lfloor$variabili quantificate$\rfloor\lceil$formula$\rceil$), per evidenziare il fatto che le parentesi che ne circoscrivono l'ambito non hanno la stessa natura di quelle associate ai funtori[13].

$$\lfloor\xi\rfloor\lceil\equiv(\neg/\xi\backslash\lfloor ab\rfloor\lceil\equiv(\xi\{ab\}\lfloor c\rfloor\lceil c\rceil)\rceil)\rceil \tag{2.15}$$

[13] Si noti che, in questo caso particolare, la sola presenza del contesto $\{--\}$, che sappiamo associato a S/NN, e di (- -), associato a S/SS, sarebbe stata comunque sufficiente a determinare la categoria di $\neg/\xi\backslash$.
Per un approfondimento sulla natura di 'delimitatori' dei quantificatori in Leśniewski, cfr. [Mièville 2004], p.28.

# Capitolo 3

# Definizioni creative nell'*Ontologia*

Nei precedenti capitoli la definizione è stata presentata principalmente come un mezzo per aumentare la *capacità espressiva* di un sistema formale. L'analisi si è focalizzata sul termine definito: la sua introduzione espande l'insieme dei simboli del sistema; nel caso che la sua categoria semantica sia inedita, essa va ad incrementare l'insieme delle categorie presenti ad un certo stadio di derivazione.

In questo capitolo verrà invece considerata la definizione come mezzo per aumentare la *capacità deduttiva* di un sistema formale. Dunque l'attenzione non è più rivolta al solo termine definito, quanto piuttosto alla definizione considerata come tesi nel suo complesso, inserita in un contesto dimostrativo.

Le definizioni che aumentano la capacità deduttiva di un sistema logico sono dette *creative*. Una definizione $\delta$ è creativa rispetto a una tesi $\tau$ (non contenente il termine definito) se $\tau$ è una conseguenza logica di $\delta$, ma non è derivabile nel sistema in assenza di tale definizione.

**Breve storia delle definizioni creative** L'idea che definire sia un atto di creazione percorre sottotraccia la storia del pensiero filosofico e matematico. Questa concezione ha avuto fortuna nei riguardi degli enti della geometria, per i quali è facile immagine una definizione come una effettiva *costruzione*, dunque come l'introduzione di un nuovo tipo di entità. Ad esempio, secondo Kant, le definizioni geometriche sono *sintetiche a priori*: l'idea di triangolo viene costruita sulla base della nostra intuizione pura di spazio. Tra i matematici, Dedekind in particolare ha sottolineato l'idea che l'attività del matematico sia composta da atti definitori, grazie ai quali vengono *creati* nuovi concetti, essenziali allo sviluppo della disciplina[1].

Non intendo proseguire questa disamina, che di certo potrebbe essere molto più ricca e dettagliata. Ciò che voglio rimarcare è che la maggioranza di questi autori, spesso distanti tra loro, è accomunata dall'aver sottolineato il carattere creativo delle definizioni solo in maniera discorsiva, in termini generali oppure in un ambito extra-logico e pre-formale.

Uno dei meriti principali di Leśniewski è invece quello di aver reso trasparente il ruolo dell'atto definitorio all'interno del processo di *dimostrazione logica*. Dal

[1] Cfr. *Nécessité et fécondité des définitions: fondements de la théorie des nombres de Richard Dedekind (1831-1916)* di H. Benis Sinaceur in [Joray, Mièville 2007].

momento che le definizioni sono *teoremi* di un sistema formale, la loro forza creativa diviene un fatto evidente e suscettibile di studio.

Secondo alcuni, è stato proprio Leśniewski il primo logico ad accorgersi della possibilità che una definizione sia 'creativa', nell'accezione tecnica del termine[2]. Di certo, egli ne fu un convinto sostenitore, all'interno del dibattito che coinvolse vari esponenti del circolo di Varsavia.

Secondo Leśniewski, "le definizioni devono essere il più possibile creative", ed il fatto che esse conducano a tesi indipendenti dagli assiomi "non è un difetto; tutto il contrario". Questi ed altri stralci di discussione orale sono riportati negli atti di una conferenza del 1928 tenuta da Lukasiewicz[3], alla quale presero parte anche Leśniewski e Tarski.

Lo stesso Lukasiewicz è il primo autore a dedicare un paragrafo all'elucidazione del concetto di definizione creativa, in [Lukasiewicz 1939]. Sempre in questo testo si trova anche un primo esempio di definizione creativa, rispetto ad un certo calcolo proposizionale presentato dall'autore. D'altro canto, nelle pubblicazioni di Leśniewski non si trova alcun riferimento alle definizioni creative proprie dei sistemi logici di sua invenzione.

Fortunatamente, se anche il pensiero di Leśniewski a riguardo è andato perduto, sono stati conservati e tramandati gli appunti dei suoi allievi. Sulla base di questo *corpus* di testimonianze, [Slupecki 1955] pubblica la prima dimostrazione della creatività delle definizioni dell'*Ontologia*, mentre [Slupecki 1953] contiene alcune definizioni creative della *Prototetica*, senza tuttavia soffermarsi su di esse.

In [Myhill 1953] è presentato un sistema per l'aritmetica provvisto di uno schema induttivo per introdurre definizioni di predicati, la cui struttura si ispira ai vincoli proposti da Leśniewski. Sulla base dello schema, l'autore introduce una definizione della verità per enunciati della teoria dei numeri, e mostra come da essa sia derivabile la consistenza del sistema stesso. In virtù del secondo teorema di Gödel, egli dimostra la creatività della suddetta definizione. Infine enuncia un teorema per cui le definizioni creative che possiamo introdurre secondo lo schema d'induzione proposto sono in numero infinito. Si tratta di risultati presentati in modo piuttosto sintetico, ma estremamente interessanti ed originali, in quanto coniugano in modo audace il tema della creatività con la teoria dei numeri e i teoremi di incompletezza di Gödel.

[Rickey 1975] propone un calcolo proposizionale assiomatizzato nello stile di Lukasiewicz, con l'aggiunta di una regola per introdurre definizioni. Egli dimostra poi la creatività di alcune definizioni relativamente a questo sistema. Infine, mette in luce come la creatività di una definizione sia sempre da intendersi come relativa ad una certa capacità deduttiva iniziale, espressa dalla base di assiomi del sistema ([Rickey 1978]).

[Nemesszeghy, Nemesszeghy 1971] rilevano come le stesse definizioni dei *Principia Mathamatica*, pur espresse nel meta-linguaggio, non siano in realtà meri espedienti di abbreviazione come i loro autori lasciano intendere. In particolare, è possibile costruire un modello che verifica gli assiomi dei PM, ma non $p \vee \neg p$. Dal momento che questa formula è sintatticamente derivabile dagli assiomi e da

[2] Questo è attestato ad esempio in [Rickey 1975].

[3] [Lukasiewicz 1928].

$\alpha \rightarrow \beta =_{def} \neg\alpha \vee \beta$, se ne conclude che tale definizione è in realtà creativa. A questo proposito, [Ginisti 1991] trae la seguente conclusione: una assiomatizzazione che contempli solo termini primitivi blocca il fenomeno delle definizioni creative meta-linguistiche. Sulla scorta di tale considerazione, egli traccia una tripartizione: (1) i sistemi logici cosiddetti 'classici', dove gli assiomi contengono solo termini primitivi, ogni definizione è meta-linguistica ed è non-creativa; (2) i sistemi di Leśniewski, dove gli assiomi rispettano il requisito ma le definizioni sono intra-linguistiche e creative; (3) i sistemi che l'autore ribattezza 'paraeuclidei', dove il mancato rispetto del requisito sugli assiomi consente alle definizioni meta-linguistiche di essere creative.

In tempi più recenti, la definizione è stata oggetto di un convegno tenuto presso l'università di Neuchâtel (Svizzera) nel 2007. Tra gli atti[4], di particolare interesse è l'intervento di P. Joray, dal titolo "*Dèfinitions explicites et abstraction*". L'autore propone di leggere le definizioni creative come procedure di astrazione, da un *defininiendum* ad un *definiens*. Questa prospettiva, appena abbozzata, è tuttavia promettente in quanto apre analogie tra la logica di Leśniewski ed i calcoli lambda. Joray si è dedicato ripetutamente al dibattito tra Lukasiewicz e Tarski sul ruolo delle definizioni in logica, nonché alle definizioni creative, con particolare riguardo al loro possibile contributo ad un programma neo-logicista ([Joray 2005a],[Joray 2005b], [Joray 2006], [Joray 2007]).

**Struttura del capitolo** Il concetto di creatività riceverà un chiarimento iniziale, con la meta-definizione del requisito di non-creatività per un sistema logico.

Verrà poi presentato il primo teorema principale del capitolo (3.1.2): l'*Ontologia* non soddisfa tale requisito, dunque ammette definizioni creative. Questo risultato è dimostrato solo in forma schematica, al fine di introdurre una particolare tecnica dimostrativa, la quale consiste nel proiettare sulla *Prototetica* tesi dell'*Ontologia*. Il risultato è riportato anche da [Iwanus 1973], p.166, n.2 e [Mièville 2004], pp.143-144.

La tecnica della proiezione verrà riutilizzata nella dimostrazione del teorema 3.2.3, per dimostrare il quale sono necessari però alcuni chiarimenti preliminari (lemmi 3.2.1 e 3.2.2). In particolare, il lemma 3.2.1 introduce il concetto di 'istanza particolare' di una definizione, mentre il lemma 3.2.2 presenta un risultato di F.V. Rickey, per cui è possibile introdurre nell'*Ontologia* un numero arbitrario di costanti nominali distinte, che ho chiamato 'costanti di Rickey', o 'numeri di Rickey' ([Rickey 1985]).

In virtù di questi lemmi, ho ottenuto una dimostrazione per l'enunciato del teorema 3.2.3: ad un certo stadio di derivazione non-creativo nell'*Ontologia*, esistono infinite[5] definizioni creative con le quali è possibile proseguire di un passo

[4][Joray, Mièville 2007].

[5]Il termine 'infinito' è estraneo allo spirito con il quale Leśniewski ha costruito i propri sistemi logici: si dovrebbe parlare sempre di un sistema attualmente finito di iscrizioni, espandibile a piacere. La mia terminologia, invece, potrebbe far pensare ad una concezione ipostatizzata delle definizioni, le quali 'esisterebbero' attualmente in qualche regno platonico. Tengo dunque a precisare che mi riferirò all' 'infinità' delle definizioni solo per ragioni di economia e semplicità di scrittura, conscio della 'disapprovazione' di Leśniewski.

la derivazione. Di questo risultato non c'è menzione nella letteratura, in quanto l'ho raggiunto autonomamente nel dicembre 2009.

Ho esposto il risultato allo stesso Rickey, che ha proposto alcuni raffinamenti della dimostrazione; inoltre, siamo giunti alla formulazione di un secondo teorema - 3.3.2. Per la dimostrazione di questo risultato è necessario introdurre la semantica a modelli di Rickey per un frammento dell'*Ontologia*. L'esposizione segue l'articolo originale di Rickey ([RICKEY 1985]) e la presentazione che ne offre [URBANIAK 2008]. Il secondo teorema sviluppa l'enunciato del primo dimostrando la creatività di ciascuna delle infinite definizioni rispetto alle precedenti, secondo un ordinamento che segue la complessità crescente della formula. Alla presentazione dei due teoremi sull'infinità delle definizioni creative nell'*Ontologia* seguiranno alcune considerazioni personali sul meccanismo della creatività ed il valore euristico dei risultati ottenuti.

## 3.1 L'*Ontologia* ammette definizioni creative

**3.1.1 Meta-definizione.** Diciamo che le definizioni di un sistema dato soddisfano la condizione di non-creatività se:

> per ogni tesi $\phi$, non contenente un dato termine $\tau$ introdotto per definizione, se $\phi$ segue dalla definizione $\alpha$ di $\tau$ ed un insieme $\Gamma$ di tesi del sistema, essa segue anche dal solo $\Gamma$.

Ovvero:

$$Se\ \Gamma \cup \{\alpha\} \ \vdash \phi \ , allora\ \Gamma \vdash \phi$$

Dove $\alpha$ è una definizione per $a$, e $\phi$ una tesi del sistema non contenente $a$.

Determinare se una certa definizione è creativa significa indagare il rapporto tra le sue conseguenze logiche e gli assiomi del sistema. Se una tesi $\varphi$ (non contenente il termine definito) è derivabile a partire dalla definizione, ma non dai soli assiomi, allora possiamo inferire la creatività di tale definizione.

Per mostrare che $\varphi$ non sarebbe derivabile in assenza della definizione, dobbiamo provare la sua *indipendenza* rispetto agli assiomi del sistema. Per fare questo, è sufficiente caratterizzare una certa *interpretazione*, che soddisfi gli assiomi ma non $\varphi$.

Si pone dunque la necessità di individuare soluzioni formali che permettano di *interpretare* le tesi di un sistema di *Ontologia*.

Un primo procedimento di interpretazione è la proiezione sulla *Prototetica*. Il sistema meno espressivo diventa, in un certo senso, un *modello interno* del sistema che lo include propriamente. Per mezzo della proiezione enunceremo la prima dimostrazione di creatività di una definizione dell'*Ontologia*, il prodotto dei nomi. Riprenderemo il metodo della proiezione a grandi linee, rimandando per i dettagli e la verifica dei lemmi alla letteratura, dove la dimostrazione è riportata in varie versioni.

Un secondo procedimento di interpretazione, tramite la semantica a modelli naturali, verrà illustrato nella sezione successiva.

**3.1.2 Meta-teorema.** Le definizioni dell'*Ontologia* non soddisfano la condizione di non-creatività.

**Dimostrazione.** (Sketch) Esibiamo un testimone di definizione creativa: la definizione del prodotto di nomi:

$$(\forall abc)(a\,\varepsilon\,(b \bullet c) \equiv (a\,\varepsilon\,a \wedge (a\,\varepsilon\,b \wedge a\,\varepsilon\,c))) \tag{3.1}$$

A partire da essa è possibile derivare la seguente tesi[6]:

$$(\forall bc)(\exists d)(\forall a)((a\,\varepsilon\,d) \equiv (a\,\varepsilon\,a \wedge (a\,\varepsilon\,b \wedge a\,\varepsilon\,c))) \tag{3.2}$$

Per dimostrare che la definizione è creativa, interpretiamo (nel seguito, chiameremo $\star$ questa interpretazione) l'*Ontologia* sulla *Prototetica*, nel seguente modo:

- Le variabili e le costanti nominali diventano variabili e costanti proposizionali.
- Il funtore $\varepsilon$ (categoria S/NN) diventa il funtore $\equiv$ (categoria S/SS).
- Sottoposte a conversione $\star$, le regole di inferenza dell'*Ontologia* diventano regole di inferenza primitive o derivate della *Prototetica*.

Sotto l'interpretazione $\star$, (3.2) diventa:

$$(\forall bc)(\exists d)(\forall a)((a \equiv d) \equiv (a \equiv a \wedge (a \equiv b \wedge a \equiv c))) \tag{3.3}$$

(3.3) non è un teorema della *Prototetica* (dimostrazione omessa). Per il risultato di completezza[7], $\neg$(3.3) è un teorema della *Prototetica*.

L'assioma dell'*Ontologia* (abbreviato *AX-ONT*)

$$\begin{aligned}(\forall Ab)((A\,\varepsilon\,b) \equiv ((\exists B)(B\,\varepsilon\,A) \wedge (\forall DC)(D\,\varepsilon\,A \wedge \\ C\,\varepsilon\,A \to D\,\varepsilon\,C) \wedge (\forall D)(D\,\varepsilon\,A \to D\,\varepsilon\,b)))\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sotto l'interpretazione $\star$, $(AX - ONT)$ diventa:

$$\begin{aligned}(\forall Ab)((A \equiv b) \equiv ((\exists B)(B \equiv A) \wedge (\forall DC)(((D \equiv A) \wedge \\ (C \equiv A)) \to (D \equiv C) \wedge (\forall D)((D \equiv A) \to (D \equiv b))))\end{aligned} \tag{3.5}$$

$AX - ONT^{\star}$ è un teorema della *Prototetica* (dimostrazione omessa).

In conclusione, il modello-interno-*Prototetica* verifica l'assioma dell'*Ontologia*, ma non (3.2). Ne consegue l'*indipendenza* di tale tesi rispetto all'assioma. Tuttavia,

[6] Nella letteratura la tesi (3.2) è detta 'facilmente derivabile' da (3.1). Tuttavia né [Iwanus 1973], p.166, n.2 né [Mièville 2004], pp.143-144 ne forniscono la 'facile' dimostrazione. La mia ipotesi è che la strada più semplice sia considerare (3.1) come la 'skolemiana' di (3.2). Nello specifico, il procedimento di skolemizzazione elimina il quantificatore particolare $\exists d$ rimpiazzando la variabile $d$ con una funzione $\bullet(--)$ che prende come argomenti le variabili $b$ e $c$ vincolate dai quantificatori universali che precedono $\exists d$.

[7] cfr. [SOBOCISNKI 1960], [SLUPECKI 1953].

nell'*Ontologia* abbiamo una derivazione di (3.2) a partire dall'assioma. Questa disparità mostra che la presenza della definizione (3.1) è essenziale nel percorso deduttivo che porta a (3.2).

La situazione può essere riassunta nel seguente schema:

$$\vdash_{ONT} AX - ONT \ e \ \vdash_{ONT} \ (3.2)$$
$$\vdash_{PROT} AX - ONT^{\star} \ ma \ \vdash_{PROT} \ \neg(3.2^{\star})$$

Poiché *Prototetica* ed *Ontologia* sono consistenti[8], ne consegue che la definizione del prodotto di nomi è creativa.

## 3.2 Le definizioni creative sono infinite

**3.2.1 Lemma.** Da ogni definizione di costante nominale dell'*Ontologia*

$$(\forall a x_0, ..., x_k)(a \,\varepsilon\, \tau) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge \varphi(x_0, ..., x_k))$$

è possibile derivare in un passo una tesi della forma

$$(\exists b)(\forall a x_0, ..., x_k)(a \,\varepsilon\, b) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge \varphi(x_0, ..., x_k))$$

grazie all'applicazione del consueto schema per l'introduzione del quantificatore particolare:

$$\frac{\alpha[t/x]}{(\exists x)(\alpha)}$$

Chiamerò questa conseguenza logica l'*istanza particolare*[9] della definizione.

Giacché nel passaggio di derivazione si è fatto riferimento alla sola struttura generale che qualsiasi definizione di costante nominale possiede, è evidente che da una qualsiasi di queste definizioni è possibile derivare la sua istanza particolare.

Ci serviremo delle istanze particolari per dimostrare la creatività delle definizioni di cui sono conseguenza logica. In particolare, si mostrerà come le istanze particolari delle definizioni creative non siano derivabili nell'*Ontologia* in assenza di esse.

**3.2.2 Lemma.** È possibile introdurre per definizione nell'*Ontologia* un numero arbitrario di costanti nominali distinte.

Queste costanti sono state introdotte per la prima volta in [RICKEY 1985]. In questo articolo, l'autore introduce anche una semantica per un frammento dell'*Ontologia*, mediante la nozione dei modelli naturali. Per mezzo dei modelli naturali è possibile dimostrare che si tratta a tutti gli effetti di costanti nominali con estensioni distinte, e non di 'battesimi' equivalenti per una stessa estensione.

[8] Una dimostrazione di questo si trova in [SLUPECKI 1953] e [SLUPECKI 1955], IV, § 1, teorema VIII.

[9] Poiché il quantificatore particolare $\exists$ è ontologicamente neutro (cfr. § 2.2.1), credo che Leśniewski disapproverebbe fortemente la denominazione "istanza esistenziale".

**Dimostrazione.** In via preliminare, introduciamo una definizione della co-estensionalità tra due nomi. Si tratta di una definizione non-creativa nell'*Ontologia*, la cui introduzione è dettata da ragioni di minore scrittura nel seguito della trattazione.

$$(\forall ab)((a \circ b) \equiv ((\forall c)(c \,\varepsilon\, a \equiv c \,\varepsilon\, b))) \tag{3.6}$$

Introduciamo ora la più breve delle definizioni di Rickey, per la costante nominale $2^{+}$.

$$(\forall a)((a \,\varepsilon\, 2^{+}) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (\exists bc)(a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c \wedge \neg(b \circ c)))) \tag{3.7}$$

L'estensione di un qualsiasi nome proprio $a$ è contenuta nell'estensione di $2^{+}$ se e solo se l'individuo nominato da $a$ cade sotto l'estensione di almeno due nomi $b$ e $c$, i quali non sono co-estensionali. Detto in termini più semplici: $a \,\varepsilon\, 2^{+}$ se e solo se l'oggetto di nome $a$ ha almeno due nomi distinti.

In modo analogo, è possibile introdurre costanti nominali $3^{+}$, $4^{+}$, etc., dove i nomi distinti dell'oggetto sono almeno 3, 4, etc. In ciascuno dei casi, il numero delle clausole di non-coestensionalità cresce insieme al numero di nomi distinti $n$, secondo il rapporto (n x n-1)/2 - sottraiamo uno perché la relazione non è riflessiva, dividiamo per due perché non è necessario specificare che è simmetrica.

$$\begin{aligned}(\forall a)((a \,\varepsilon\, 3^{+}) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (\exists bcd)(&a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c \wedge a \,\varepsilon\, d \wedge \\ &\neg(b \circ c) \wedge \neg(c \circ d) \wedge \neg(b \circ d))))\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}(\forall a)((a \,\varepsilon\, 4^{+}) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (\exists bcde)(a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c \wedge a \,\varepsilon\, d \wedge a \,\varepsilon\, e \\ \wedge\neg(b \circ c) \wedge \neg(b \circ d) \wedge \neg(b \circ e) \wedge \neg(c \circ d) \wedge \neg(c \circ e) \wedge \neg(d \circ e))))\end{aligned} \tag{3.9}$$

**3.2.3 Meta-teorema.** Dato un sistema di *Ontologia* ad uno stadio di derivazione $\sigma$, comprendente l'assioma e un certo numero di tesi e definizioni non-creative, ci sono infinite definizioni creative con le quali è possibile portare avanti di un passo la derivazione (stadio $\sigma+1$).

**Dimostrazione.** Il teorema viene dimostrato provando che ciascuna delle costanti nominali di Rickey è introdotta mediante una definizione creativa.

In virtù del lemma 3.2.1, possiamo derivare l'istanza particolare da ognuna delle costanti nominali di Rickey. Per esempio, dalla definizione di $2^{+}$, possiamo inferire:

$$(\exists d)(\forall a)((a \,\varepsilon\, d) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (\exists bc)(a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c \wedge \neg(b \circ c)))) \tag{3.10}$$

Proiettiamo ora la tesi (3.10) sulla *Prototetica*, secondo l'interpretazione $\star$ esposta nello svolgimento del teorema 3.1.2. In virtù della proprietà di traslabilità (vd. § 2.1), la sottoformula $\neg(b \circ c)$ è stata rimpiazzata con il suo *definiens* $\neg((\forall A)((A \,\varepsilon\, b) \equiv (A \,\varepsilon\, c)))$ (cfr. (3.6)). In tale modo l'istanza particolare contiene il solo $\varepsilon$, e la proiezione non richiede regole aggiuntive rispetto a quanto detto sopra.

$$(\exists d)(\forall a)((a \equiv d) \equiv (a \equiv a \wedge (\exists bc)(a \equiv b \wedge a \equiv c \wedge \neg((\forall A)((A \equiv b) \equiv (A \equiv c)))))) \tag{3.11}$$

Consideriamo nuovamente la *Prototetica* come modello interno per l'*Ontologia*.

Dal teorema 3.1.2 sappiamo che la proiezione dell'assioma dell'*Ontologia* è una tesi della *Prototetica*.

Perciò, per dimostrare la creatività di (3.7), è sufficiente provare che la (proiezione della) sua istanza particolare (3.10) non è una tesi della *Prototetica*.

A tale scopo, si procede interpretando (3.11) in un modello $\mathbb{M}_p$, popolato da soli due individui 1 (*Vero*) e 0 (*Falso*)[10]. Mi limito a proporre una nozione di soddisfacibilità per un frammento della *Prototetica*, limitato a variabili proposizionali e connettivi del calcolo proposizionale classico.

Una interpretazione $< \mathbb{M}, v >$ soddisfa una formula scritta nel linguaggio della *Prototetica* alle seguenti condizioni:

- $< \mathbb{M}_p, v > \models \alpha$ sse $v(\alpha) = 1$
- $< \mathbb{M}_p, v > \models \neg\alpha$ sse $v(\alpha) = 0$
- $< \mathbb{M}_p, v > \models \alpha \wedge \beta$ sse $< \mathbb{M}, v > \models \alpha$ e $< \mathbb{M}, v > \models \beta$
- *[In modo analogo, gli altri connettivi del calcolo proposizionale classico (che è contenuto propriamente nella* Prototetica*), secondo le rispettive tavole di verità]*
- $< \mathbb{M}_p, v > \models (\forall a)(\varphi(a))$ sse $v(a) = 1 \;\Rightarrow\; v(\varphi) = 1$ e $v(a) = 0 \;\Rightarrow\; v(\varphi) = 1$

  $(\forall a)(\varphi(a))$ è soddisfacibile quando $\varphi(a)$ ha valore 1, qualsiasi sia il valore assegnato ad $a$.

- $< \mathbb{M}_p, v > \models (\exists a)(\varphi(a))$ sse $v(a) = 1 \;\Rightarrow\; v(\varphi) = 1$ oppure $v(a) = 0 \;\Rightarrow\; v(\varphi) = 1$

  $(\exists a)(\varphi(a))$ è soddisfacibile quando $\varphi(a)$ ha valore 1, per almeno uno dei due valori che è possibile assegnare ad $a$.

Una formula $\alpha$ è un teorema della *Prototetica* se $< \mathbb{M}_p, v > \models \alpha$ per ogni possibile valutazione $v$.

Verifichiamo ora l'appartenenza alla *Prototetica* della tesi (3.11) secondo questo procedimento.

Partendo dal quantificatore particolare più esterno, testiamo le valutazioni $v$ tali che *v(d) = 1*.

$$(\forall a)((a \equiv \underline{1}) \equiv (a \equiv a \wedge (\exists bc)(a \equiv b \wedge a \equiv c \wedge \neg((\forall A)((A \equiv b) \equiv (A \equiv c))))))$$

[10]Per una proposta di interpretazione delle formule della *Prototetica*, cfr. [MIEVILLE 2004], pp.136-141.

Per rendere l'enunciato vero, ogni possibile assegnazione di valore ad $a$ deve verificare l'ambito di $\forall a$. Cominciamo con le valutazioni $v$ tali che $v(a) = 1$.

$$(\underline{1} \equiv \underline{1}) \equiv (\underline{1} \equiv \underline{1} \wedge (\exists bc)(\underline{1} \equiv b \wedge \underline{1} \equiv c \wedge \neg((\forall A)((A \equiv b) \equiv (A \equiv c)))))$$

Per rendere vero il secondo membro della doppia implicazione, dobbiamo prendere in considerazione le valutazioni che rendono veri $b$ e $c$ ($\exists bc$).

$$(\underline{1} \equiv \underline{1}) \equiv (\underline{1} \equiv \underline{1} \wedge \underline{1} \equiv \underline{1} \wedge \underline{1} \equiv \underline{1} \wedge \neg((\forall A)((A \equiv \underline{1}) \equiv (A \equiv \underline{1}))))$$

Ma ora l'ultimo membro della congiunzione è equivalente a
$\neg((\forall A)(A \equiv A))$, che è falso.

Dunque il secondo membro della doppia implicazione principale è falso, e l'enunciato nel suo complesso è falso.

Proviamo allora a ricominciare, valutando il caso delle assegnazioni di valore 0 a $d$.

$$(\forall a)((a \equiv \underline{0}) \equiv (a \equiv a \wedge (\exists bc)(a \equiv b \wedge a \equiv c \wedge \neg((\forall A)((A \equiv b) \equiv (A \equiv c))))))$$

Testiamo $v(a) = v(d) = 0$.

$$(\underline{0} \equiv \underline{0}) \equiv (\underline{0} \equiv \underline{0} \wedge (\exists bc)(\underline{0} \equiv b \wedge \underline{0} \equiv c \wedge \neg((\forall A)((A \equiv b) \equiv (A \equiv c)))))$$

Come sopra, se vogliamo rendere vero il secondo membro della doppia implicazione, dobbiamo prendere $b$ e $c$ falsi.

$$(\underline{0} \equiv \underline{0}) \equiv (\underline{0} \equiv \underline{0} \wedge \underline{0} \equiv \underline{0} \wedge \underline{0} \equiv \underline{0} \wedge \neg((\forall A)((A \equiv \underline{0}) \equiv (A \equiv \underline{0}))))$$

Ma di nuovo l'ultimo membro della congiunzione risulta falso. Dunque l'intero enunciato, per le valutazioni $v$ tali che $v(d) = 0$, è falso.

Abbiamo dunque che (3.11) non è una tesi della *Prototetica*. Infatti non c'è alcuna assegnazione di valore di verità per $d$ che rende vero l'enunciato.

Ancora una volta, schematicamente:

$$\begin{array}{c} \vdash_{ONT} AX - ONT \; e \; \vdash_{ONT} \; (3.10) \\ \vdash_{PROT} AX - ONT^{\star} \; ma \; \vdash_{PROT} \; \neg(3.10^{\star}) \end{array}$$

Ne consegue la creatività della definizione di $2^{+}$.

In virtù del lemma 3.2.1, possiamo introdurre l'istanza particolare di ciascuna costante di Rickey.

In seguito alla proiezione sulla *Prototetica*, ognuna delle istanze particolari conserva la struttura che rende falsa ($3.10^{\star}$). Infatti, perché sia vera l'istanza, dobbiamo sempre considerare anche il caso in cui il primo membro della doppia implicazione sia vero.

Si tratta del caso in cui le variabili $x$ e $y$ nel primo membro - $x \equiv y$ - siano concordi nel valore di verità.

Tuttavia questa assegnazione rende per forza di cose falso il secondo membro. Infatti ciascuna clausola di co-estensionalità, di cui il secondo membro si compone, ha la forma $\neg((\forall A)((A \equiv x) \equiv (A \equiv y)))$, che risulta insoddisfacibile nel caso in cui $x$ e $y$ abbiano valori di verità concordi.

Abbiamo dunque che la verità del primo membro rende sempre falso il secondo membro della doppia implicazione. Ne consegue che ciascuna istanza particolare, che conserva tale struttura, non è soddisfatta per ogni possibile valutazione, dunque non è un teorema della *Prototetica*.

Si conclude che, per ciascuna delle definizioni di costanti di Rickey, è possibile dimostrarne la creatività rispetto all'assioma dell'*Ontologia*.

Ne consegue l'enunciato del teorema.

## 3.3 Le definizioni creative sono infinite (2)

La proiezione sulla *Prototetica*, in quanto procedimento dimostrativo, ha un limite: la porzione di *Ontologia* rispetto alla quale dimostriamo la creatività di una certa definizione è sempre quella 'basilare', con la capacità deduttiva data dal solo assioma. In altre parole, non possiamo usare la proiezione sulla *Prototetica* per dimostrare uno scarto creativo rispetto ad una *Ontologia* dove già sono presenti altre definizioni creative. Ad esempio, non possiamo dimostrare la creatività di una definizione $D_2$ rispetto ad una *Ontologia* comprendente l'assioma e la definizione del Prodotto dei nomi - (3.1). Infatti quest'ultima definizione, che abbiamo già visto essere creativa, risulta falsa se interpretata sulla *Prototetica* (cfr. teorema 3.1.2).

### 3.3.1 I modelli naturali di Rickey

La semantica proposta da Rickey[11] consente di elaborare un procedimento dimostrativo che superi i limiti imposti della proiezione sulla *Prototetica*. In particolare, è possibile dimostrare la creatività di una definizione rispetto ad un segmento di derivazione nell'*Ontologia* contenente altre definizioni creative.

La modellizzazione riguarda la sola *Ontologia elementare* (abb. OE) : quella porzione dell'*Ontologia* dove la quantificazione è ristretta alle variabili di categoria N.

Pur trattandosi solo di una piccola parte dell'intero sistema logico, si tratta di un frammento significativo, che fornisce un osservatorio ottimale per indagare il meccanismo della creatività.

Nella letteratura dedicata all'*Ontologia* sono state proposte altre teorie dei modelli, le quali divergono soprattutto per il trattamento riservato ai quantificatori[12]. Ho scelto di prendere in considerazione la proposta di Rickey in quanto rappresenta - a mio parere - il tentativo più affine alle intuizioni di Leśniewski intorno ai rapporti tra nomi ed oggetti.

**Modelli naturali** La nozione fondamentale della semantica di Rickey è quella di *modello naturale*. Possiamo pensare ad un modello naturale come ad una

[11] [Rickey 1985].

[12] Un esempio influente è [Simons 1985]. Per una panoramica sull'argomento, si consiglia la seconda parte di [Urbaniak 2008].

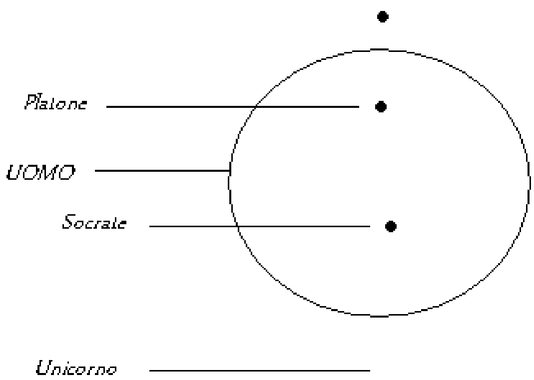


Figura 3.1: Un esempio di modello naturale, dove N = {UOMO, Socrate, Platone, Unicorno} e la cardinalità di I è 3.

quadrupla:

$$\mathbb{M} =< N, I, \varepsilon^*, \backsim> \tag{3.12}$$

Dove:

- $N$ è una collezione di nomi $n$. $N$ deve accogliere almeno un nome, affinché v possa mappare i nomi del linguaggio su un qualche elemento della struttura.

- $I$ è un dominio di individui $i$. In accordo con la neutralità ontologica del linguaggio dell'*Ontologia*, nessuna restrizione è imposta su $I$. È possibile dunque che non ci siano individui nel dominio di interpretazione.

- $\varepsilon^*$ è una relazione binaria su N, che interpreta il funtore $\varepsilon$.

- $\backsim$ è una relazione di denotazione tra elementi di N ed elementi di I. Su di essa non è posta alcuna restrizione. Perciò $\backsim$ accomoda alcune delle intuizioni più feconde relative all'*Ontologia*: due nomi possono denotare lo stesso individuo; un nome può non avere denotazione; un nome può denotare più individui. A seconda della loro estensione, avremo dunque nomi per singoli individui, nomi per gruppi di individui e nomi vuoti.

$\varepsilon*$ è l'interpretazione standard di $\varepsilon$, illustrata dall'autore con una meta-definizione riguardante la struttura.

$$m \ \varepsilon^* \ n \ sse \ (!\exists i)(m \backsim i) \wedge (\exists i)(m \backsim i \wedge n \backsim i) \tag{3.13}$$

Dove $m$ ed $n$ sono elementi di $N$, i è elemento di $I$, e la definizione rispecchia le condizioni fornite dall'interpretazione intuitiva standard dell'Assioma dell'*Ontologia*: "$m$ è $n$ se e solo se $m$ è nome per un individuo e la sua estensione è contenuta nell'estensione di $n$".

**Definizioni** Una semantica plausibile per l'*Ontologia* deve accomodare anche le definizioni, rispecchiando le loro conseguenze a livello di interpretazione. A questo proposito Rickey propone una mappa di valutazione $v$, da termini del linguaggio appartenenti alla categoria dei nomi a elementi di $N$. Poiché l'*Ontologia* è un sistema inscrizionale, il suo sviluppo è finito relativamente ad un certo stadio di derivazione. Dunque il dominio della funzione $v$ è un insieme finito (che chiameremo $NA$), i cui elementi sono i rappresentanti della categoria semantica dei nomi presenti ad un certo stadio di derivazione.

$$v : NA \ \rightarrowtail \ N$$

Quando una definizione introduce un nuovo rappresentante della categoria dei nomi, la mappa v viene estesa, aggiungendo il termine definito, eventuali nuove variabili nominali e la loro valutazione. Lo sviluppo di $NA$ segue quello di $\nu$, in modo tale che ogni definizione generi una estensione v' di v.

$$v' \ : \ NA' \ \rightarrowtail \ N$$

In riferimento alle posizioni filosofiche di Leśniewski, è importante rimarcare che nella semantica elaborata da Rickey le variabili sono interpretate sempre su nomi (gli elementi di $N$), e mai su individui (gli elementi di $I$).

**Verità nel modello** Una interpretazione naturale $< \mathbb{M}, v >$ di una formula $\phi$ è una valutazione delle variabili nominali di $\phi$, secondo una mappa $v$, in un modello naturale $\mathbb{M}$. L'interpretazione soddisfa $\phi$ alle seguenti condizioni:

- $< \mathbb{M}, v > \models A \,\varepsilon\, b$ sse $v(A)\,\varepsilon^* v(b)$
- $< \mathbb{M}, v > \models \neg\alpha$ sse $< \mathbb{M}, v > \not\models \alpha$
- $< \mathbb{M}, v > \models \alpha \wedge \beta$ sse $< \mathbb{M}, v > \models \alpha$ e $< \mathbb{M}, v > \models \beta$
- *[In modo analogo, gli altri connettivi del calcolo proposizionale classico secondo le rispettive tavole di verità]*
- $< \mathbb{M}, v > \models (\forall A)(\varphi(A))$ sse per ogni possibile estensione v' alla mappa v, data da ciascun nuovo termine nominale $b \in NA'$, $< \mathbb{M}, v' > \models \varphi(b)$
- $< \mathbb{M}, v > \models (\exists A)(\varphi(A))$ sse per almeno una possibile estensione v' alla mappa v, data da ciascun nuovo termine nominale $b \in NA'$, $< \mathbb{M}, v' > \models \varphi(b)$

Infine, diciamo che:

- Una formula $\phi$ è *vera in* $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M} \models \phi$) se è soddisfatta sotto tutte le possibili interpretazioni $< \mathbb{M}, v >$ (quindi per ogni valutazione $v$ che è possibile generare in maniera combinatoria con il cartesiano $NAxN$).
- Una formula è *valida per l'Ontologia* se è vera in tutti i modelli naturali dove è vero l'assioma dell'*Ontologia*.

Figura 3.2: Modello naturale con un solo individuo, di nome x

### 3.3.2 Definizioni creative e modelli naturali

Si è introdotta per sommi capi la semantica di Rickey, al fine di visualizzare un altro contesto di indagine per le definizioni creative.

A questo riguardo, il punto centrale è la possibilità di avere modelli naturali dove l'assioma dell'*Ontologia* è vero, ma una certa definizione (e le sue conseguenze logiche) ha una interpretazione che la rende falsa. Per fare questo, è sufficiente scegliere di estendere la mappa v in modo tale che la costante nominale introdotta riceva una certa valutazione, per cui la tesi è falsa nel suo complesso.

Ad esempio, nella struttura descritta in figura 3.2 l'assioma dell'*Ontologia* è vero. La definizione seguente (cfr. (2.1)), invece, risulta falsa:

$$(\forall a)((a\,\varepsilon \bigwedge) \equiv (a\,\varepsilon\, a \wedge \neg(a\,\varepsilon\, a))) \tag{3.14}$$

Infatti, possiamo mappare[13] la costante $\bigwedge$ solo su $x$. Così il *definiendum* risulta nel complesso vero ($\mathbb{M} \models \overline{x}\varepsilon^*\overline{x}$). Invece, il *definiens* risulta falso, in quanto il secondo membro della congiunzione ($\neg a\,\varepsilon\, a$) è falso. Dunque la definizione nel suo complesso risulta falsa nel modello di cui sopra. In modo analogo, la seguente tesi (generalizzazione di $\neg(\bigwedge\,\varepsilon\,\bigwedge)$, conseguenza logica di (3.14)) è falsa nella struttura in figura 3.2:

$$\neg(\forall a)(a\,\varepsilon\, a) \tag{3.15}$$

Così come risulta falsa l'istanza particolare di (3.14):

$$(\exists b)(\forall a)((a\,\varepsilon\, b) \equiv (a\,\varepsilon\, a \wedge \neg(a\,\varepsilon\, a))) \tag{3.16}$$

Allo scopo di indagare la creatività di qualsiasi definizione nominale dell'Ontologia elementare tramite i modelli naturali, mi atterrò al seguente procedimento dimostrativo:

[13] In questo caso la scelta è anche obbligata. In altri casi, secondo Rickey conta la possibilità che abbiamo di falsificare una definizione scegliendo di mappare la costante definita su un nome piuttosto che un altro. Preferendo non seguire Rickey su questo punto, nel seguito della trattazione verificherò la creatività di una definizione non interpretando essa stessa in una struttura, ma sempre la sua istanza particolare. Si noti che nessuna istanza particolare contiene costanti, ma solo variabili vincolate: così, la sua verità o falsità nella struttura è *indipendente* dalle nostre scelte riguardo l'estensione della mappa di valutazione.

1. Individuazione di un certo insieme $\Theta_\sigma$ di tesi inscritte in un sistema di *Ontologia* ad un certo stato di derivazione $\sigma$. $\Theta_\sigma$ indica il potenziale deduttivo dell'*Ontologia* allo stadio $\sigma$; $\Theta_\sigma$ comprende sempre l'assioma della *Prototetica* (1.3) e dell'*Ontologia* (2.4) - si ricordi che qualsiasi sistema di *Ontologia* presuppone come base un sistema di *Prototetica* giunto ad un qualche stadio di sviluppo.

2. Individuazione dell'istanza particolare $\varphi_\delta$ della definizione $\delta$ di cui si vuole indagare la creatività. Per il lemma 3.2.1, tale tesi è sempre derivabile da una qualunque definizione di costante nominale.

3. Costruzione di un modello naturale $\mathbb{M}$ tale che, per ogni $\phi \in \Theta_\sigma$, $\mathbb{M} \models \phi$, ma $\mathbb{M} \not\models \varphi_\delta$.

4. Se un modello con queste caratteristiche è costruibile, allora $\delta$ è *creativa* rispetto allo stadio di derivazione $\sigma$ dell'*Ontologia*.

**3.3.1 Meta-definizione.** Chiamiamo un certo $\sigma$ *stadio di sviluppo non-creativo* dell'*Ontologia* se $\Theta_\sigma$ non contiene definizioni creative rispetto a $\Theta_\rho = \{AX - PROT,\ AX - ONT\}$.

**3.3.2 Meta-teorema.** Dato un sistema di *Ontologia* ad uno stadio di sviluppo non-creativo $\sigma$, c'è un percorso $\Pi$, con il quale proseguire la derivazione, contenente un numero arbitrariamente grande di definizioni creative.

**Dimostrazione.** $\Pi$ ha la seguente struttura:

$$[\sigma], D_3, T_3, D_4, T_4, D_5, T_5, \ldots$$

Dove $D_3, D_4, D_5, \ldots$ sono definizioni delle costanti di Rickey $3^+$, $4^+$, $5^+, \ldots$ ; $T_3$, $T_4$, $T_5, \ldots$ sono le rispettive istanze particolari.

Dato un qualsiasi segmento di derivazione $\pi = [\sigma], \ldots, D_k,\ T_k$ in $\Pi$, possiamo costruire un modello naturale $\mathbb{M}$ tale che, per ogni $\phi \in \Theta_\pi$, $\mathbb{M}_k \models \phi$, ma $\mathbb{M}_k \not\models T_{k+1}$ (dove $T_{k+1}$ è l'istanza particolare di $D_{k+1}$). Questo prova la creatività di $D_{k+1}$ rispetto al segmento $\pi$. La generalizzabilità del procedimento ad un segmento $\pi$ e una $D_{k+1}$ qualsiasi dimostra il teorema.

I modelli naturali necessari alla dimostrazione sono costruibili secondo il seguente procedimento induttivo (cfr. figura 3.3):

- $\mathbb{M}_2$ è popolato da due individui, denotati da nomi propri $x_0$ e $x_1$ ed un nome comune $y_1$. $\mathbb{M}_2$ rappresenta il caso zero: verifica l'assioma dell'*Ontologia*, ma falsifica $T_3$. Infatti nessun individuo ha almeno tre nomi distinti, cosicché non ci sono testimoni per $e$ in $T_3$ (vd. (3.19)). Perciò $D_3$ è creativa rispetto al segmento di derivazione $[\sigma]$.

- $\mathbb{M}_3$ è popolato da tre individui, denotati da nomi propri $x_0$, $x_1$, $x_2$, e due nomi comuni $y_0$ e $y_1$. La struttura verifica $T_2$ e $T_3$ in quanto l'individuo denotato da $x_0$ ha tre nomi distinti. Tuttavia nessun individuo ha quattro nomi distinti. Perciò $T_4$ è falsa in $\mathbb{M}_3$, e $D_4$ risulta creativa rispetto al segmento di derivazione $[\sigma], D_2, T_2, D_3, T_3$.

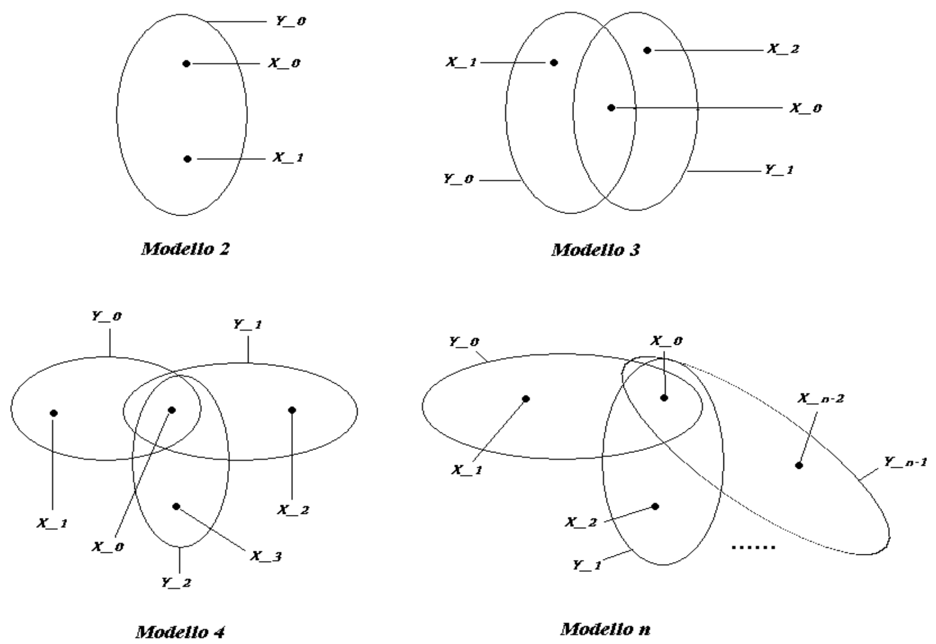


Figura 3.3: Sequenza di modelli naturali

- $\mathbb{M}_k$ è la generalizzazione dei casi precedenti ad una definizione $D_{k+1}$ qualsiasi. In $\mathbb{M}_k$ ci sono $k$ individui, con rispettivi nomi propri $x_0$, $x_1$, ..., $x_{k-1}$. Inoltre ci sono $k-1$ nomi comuni, $y_0$, $y_1$, ..., $y_{k-2}$. $y_0$ nomina $x_0$ e $x_1$; $y_1$ nomina $x_0$ and $x_2$, e, in generale, $y_j$ nomina $x_0$ e $x_{j-1}$, per $0 \leq j \leq k-2$. La costruibilità di un tale modello dimostra la creatività di $D_{k+1}$ rispetto al segmento di derivazione $[\sigma], \ldots, D_k, T_k$.

Si noti che il percorso $\Pi$ non comincia con $D_2$, $T_2$. Questo perché l'istanza particolare $T_2$ è falsa in tutti i modelli successivi $\mathbb{M}_3, \ldots, \mathbb{M}_k$. Intuitivamente, la sua falsità deriva dal fatto che in ciascuno di questi modelli ci sono più individui che hanno la proprietà di avere almeno due nomi distinti. In particolare in $\mathbb{M}_3$ hanno questa proprietà gli individui nominati rispettivamente da $x_1$, $y_0$, da $y_2$, $y_1$ e da $x_0$, $y_0$, $y_1$. Questa situazione consente di trovare un controesempio che falsifica (3.10), qualsiasi testimone $d$ venga scelto. Ad esempio, con $v(d) = x_0$:

$$(\forall a)(a \,\varepsilon\, \underline{x_0}) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (\exists bc)(a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c \wedge \neg(b \circ c))) \tag{3.17}$$

Possiamo trovare un controesempio $v(a) = x_1, v(b) = x_1, v(c) = y_0$, tale che il primo membro di $\equiv$ risulti falso ed il secondo vero, falsificando la formula nel suo complesso.

$$(\underline{x_1} \,\varepsilon\, \underline{x_0}) \equiv (\underline{x_1} \,\varepsilon\, \underline{x_1} \wedge \underline{x_1} \,\varepsilon\, \underline{x_1} \wedge \underline{x_1} \,\varepsilon\, \underline{y_0} \wedge \neg(\underline{x_1} \circ \underline{y_0})) \tag{3.18}$$

Il problema viene meno se il percorso inizia da $D_3$, $T_3$. Infatti $T_3$ resta vero in tutti i modelli successivi, proprio perché gli individui come $x_1$ hanno due nomi distinti, ma non tre nomi distinti. Il solo individuo che soddisfa questo requisito è il testimone con nomi $x_0$, $y_0$, $y_1$, ..., $y_k$.

$$(\exists e)(\forall a)((a \,\varepsilon\, e) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (\exists bcd)(a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c \wedge a \,\varepsilon\, d \wedge \neg(b \circ c) \wedge \neg(c \circ d) \wedge \neg(b \circ d)))) \tag{3.19}$$

Lo stesso per $T_4$, $T_5$ e successivi.

Per rendere meglio l'idea di come si provi la falsità di una istanza particolare in un modello naturale, dimostro che $\mathbb{M}_3 \nvDash T_4$.

$T_4$ è l'istanza naturale della definizione della costante di Rickey $4^+$:

$$(\exists f)(\forall a)((a \,\varepsilon\, f) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (\exists bcde)(a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c \wedge a \,\varepsilon\, d \wedge a \,\varepsilon\, e \wedge \neg(b \circ c) \wedge \neg(b \circ d) \wedge \neg(b \circ e) \wedge \neg(c \circ d) \wedge \neg(c \circ e) \wedge \neg(d \circ e)))) \tag{3.20}$$

$\mathbb{M}_3 \nvDash T_4$ perché non c'è alcuna valutazione $v$ per la quale $v(f)$ renda vero in $\mathbb{M}_3$ l'ambito di $(\exists f)$.

Verifico questo fatto provando ogni possibile $v(f)$ in $\mathbb{M}_3$.

Cominciamo con le mappe di valutazione $v$ per cui $v(f) = x_1$.

$$(\forall a)((a \,\varepsilon\, \underline{x_1}) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (\exists bcde)(a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c \wedge a \,\varepsilon\, d \wedge a \,\varepsilon\, e \wedge \neg(b \circ c) \wedge \neg(b \circ d) \wedge \neg(b \circ e) \wedge \neg(c \circ d) \wedge \neg(c \circ e) \wedge \neg(d \circ e))))$$

C'è almeno un nome su cui valutare $a$ per il quale la portata di $(\forall a)$ risulta falsa: $v(a) = x_1$.

$$(\underline{x_1} \,\varepsilon\, \underline{x_1}) \equiv (\underline{x_1} \,\varepsilon\, \underline{x_1} \wedge (\exists bcde)(\underline{x_1} \,\varepsilon\, b \wedge \underline{x_1} \,\varepsilon\, c \wedge \underline{x_1} \,\varepsilon\, d \wedge \underline{x_1} \,\varepsilon\, e \wedge \neg(b \circ c) \wedge \neg(b \circ d) \wedge \neg(b \circ e) \wedge \neg(c \circ d) \wedge \neg(c \circ e) \wedge \neg(d \circ e)))$$

Infatti il primo membro $(\underline{x_1} \,\varepsilon\, \underline{x_1})$ della doppia implicazione risulta vero, ma il secondo membro risulta falso in $\mathbb{M}_3$ - giacché non ci sono nel modello 4 nomi *distinti* per cui esista almeno una $v$ tale che $v(b)$, $v(c)$, $v(d)$, $v(e)$ rendano vero il secondo membro.

Quindi $v(f) = x_1$ rende falsa la formula, così come $v(f) = x_2$ e $v(f) = x_0$, per i quali è possibile trovare analoghi contro-esempi in $v(a) = x_2$ e $v(a) = x_0$. Si noti che gli individui nominati da $x_1$ e $x_2$ hanno solo due nomi distinti (il nome proprio ed il nome comune $y_0$ o $y_1$), mentre l'individuo nominato da $x_0$ è l'unico ad avere tre nomi distinti ($x_0$, $y_1$ e $y_1$) - infatti, grazie alla presenza di $x_0$, $\mathbb{M}_3 \models T_3$.

Torniamo alla dimostrazione principale: esauriti i nomi propri, proviamo ora a valutare $f$ sui nomi comuni - ad esempio $v(f) = y_0$.

$$(\forall a)((a \,\varepsilon\, \underline{y_0}) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (\exists bcde)(a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c \wedge a \,\varepsilon\, d \wedge a \,\varepsilon\, e \wedge \neg(b \circ c) \wedge \neg(b \circ d) \wedge \neg(b \circ e) \wedge \neg(c \circ d) \wedge \neg(c \circ e) \wedge \neg(d \circ e))))$$

È subito evidente che possiamo interpretare $a$ su un nome il cui denotato ha anche nome $y_0$ (ad esempio, $v(a) = x_1$), rendendo così vero il primo membro della formula principale, ma non il secondo membro.

$$(\underline{x_1} \,\varepsilon\, \underline{y_0}) \equiv (\underline{x_1} \,\varepsilon\, \underline{x_1} \wedge (\exists bcde)(\underline{x_1} \,\varepsilon\, b \wedge \underline{x_1} \,\varepsilon\, c \wedge \underline{x_1} \,\varepsilon\, d \wedge \underline{x_1} \,\varepsilon\, e$$
$$\wedge\neg(b \circ c) \wedge \neg(b \circ d) \wedge \neg(b \circ e) \wedge \neg(c \circ d) \wedge \neg(c \circ e) \wedge \neg(d \circ e)))$$

I valori di verità dei due membri di $\equiv$ discordano, quindi la formula risulta falsa nel complesso. È analogo il caso di $y_1$, prendendo $v(a) = x_2$.

Abbiamo così dimostrato che non per ogni valutazione $v$ vale $< \mathbb{M}_3, v > \models T_4$, dunque $\mathbb{M}_3 \not\models T_4$.

## 3.4 Perché l'*Ontologia* ammette definizioni creative?

I teoremi sopra esposti mostrano come le definizioni creative non siano confinate ad un ambito ristretto dell'*Ontologia*, ma siano piuttosto un fenomeno pervasivo; tanto che è possibile inscriverne nella nostra derivazione un numero arbitrariamente grande, sviluppando una *Ontologia* di capacità deduttiva crescente.

Tuttavia, gli infiniti esempi di definizione creativa non forniscono alcuna evidenza diretta del *meccanismo* grazie al quale l'*Ontologia* possiede tale proprietà, che lo rende differente da qualsiasi altro sistema logico.

È possibile suggerire un contributo a questa indagine, prendendo in considerazione gli autori che hanno trattato la creatività per sopprimerla, al fine di sottoporre l'*Ontologia* ad indagini meta-logiche più tradizionali. In questa sede, intendo accennare in particolare ai lavori di Iwanus ([Iwanus 1973]) e Stachniak ([Stachniak 1981]).

Ragionare in negativo può gettare luce sul positivo: comprendere perché certi assiomi inibiscano la creatività del sistema può spiegare perché questa sia presente nell'*Ontologia* tradizionalmente intesa.

### 3.4.1 Gli assiomi di Iwanus

L'allargamento della base assiomatica proposto da Iwanus rende l'*Ontologia elementare* un sistema non-creativo (che chiameremo OE+).

$$(\forall bc)(\exists d)(\forall a)((a \,\varepsilon\, d) \equiv (a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c)) \tag{3.21}$$
$$(\forall a)(\exists b)(\forall c)(c \,\varepsilon\, b \equiv (c \,\varepsilon\, c \wedge \neg(c \,\varepsilon\, a))) \tag{3.22}$$

Il primo dei due assiomi è conseguenza logica della definizione del prodotto dei nomi (3.1). Il secondo assioma conserva la struttura del primo, trattandosi di una conseguenza diretta di una definizione. In questo caso $b$ sta per il complemento di $a$.

Se interpretiamo le variabili nominali come insiemi, i due assiomi esprimono assunzioni molto forti: nell' 'universo di discorso' del sistema OE+, esiste sempre il complemento di un insieme ed esiste sempre l'intersezione di due insiemi.

Giacché abbiamo intersezione e complemento, disponiamo di sufficienti operazioni per definire anche unione ed inclusione. Su queste basi Iwanus traccia una analogia tra l'algebra degli insiemi ed una 'algebra dei nomi', sviluppata nel sistema OE+ tramite le seguenti definizioni (dove (3.25) è analoga alla definizione di $\bigwedge$, § 3.3.2):

$$(\forall ab)((a \subset b) \equiv (\forall z)((z \,\varepsilon\, x) \to (z \,\varepsilon\, y))) \tag{3.23}$$
$$(\forall ab)((a = b) \equiv (\forall z)((z \,\varepsilon\, x) \equiv (z \,\varepsilon\, y))) \tag{3.24}$$
$$(\forall a)((a \,\varepsilon\, \varnothing) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge \neg(a \,\varepsilon\, a))) \tag{3.25}$$
$$(\forall ab)((a \,\varepsilon\, \overline{b}) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge \neg(a \,\varepsilon\, b))) \tag{3.26}$$
$$(\forall abc)(a \,\varepsilon\, (b \bullet c) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (a \,\varepsilon\, b \wedge a \,\varepsilon\, c))) \tag{3.27}$$
$$(\forall abc)(a \,\varepsilon\, (b + c) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge (a \,\varepsilon\, b \vee a \,\varepsilon\, c))) \tag{3.28}$$

Come sottolineato da Iwanus, se esprimiamo in termini equazionali tali definizioni per le relazioni $\subset$ e $=$, la costante $\varnothing$, le operazioni $\overline{x}$, $+$ e $\bullet$, esse soddisfano in OE+ i postulati dell'algebra di Boole[14].

La costruzione di un'algebra dei nomi mediante definizioni è un procedimento creativo rispetto all'*Ontologia* standard: è stato dimostrato infatti che almeno la definizione di $\varnothing$ ed il prodotto di nomi sono tali.

Il fatto che la creatività nell'*Ontologia elementare* possa essere neutralizzata con l'aggiunta di due sole istanze particolari è piuttosto sorprendente. Significa che la definizione del prodotto di nomi e del complemento rivestono un valore teoretico preminente rispetto ad altre definizioni creative. Per meglio dire, tutte le altre definizioni creative dell'*Ontologia elementare* non sono più tali se le istanze particolari delle due definizioni di cui sopra sono prese come assiomi.

Il punto focale sembra essere dunque la possibilità di costruire un'algebra dei nomi. Qualora questa sia esprimibile nell'*Ontologia elementare* senza introdurre definizioni creative, allora nessun altro tipo di creatività riguardante le estensioni delle costanti nominali è possibile.

Dal punto di vista strutturale, possiamo interpretare l'aggiunta dei due assiomi di cui sopra come un allargamento dei requisiti minimi che un modello (ad esempio un modello naturale di Rickey) dell'*Ontologia* deve possedere. In termini intuitivi, i modelli naturali che soddisfano i nuovi assiomi sono più 'affollati' di nomi. Tale affollamento determina un requisito sufficiente per verificare ogni conseguenza logica delle definizioni introdotte nel sistema. Perciò tali definizioni non sono più creative.

Facciamo un esempio: la definizione del nome (o insieme) vuoto, la quale risulta creativa nell'*Ontologia* standard (vd. § 3.3.2). La sua istanza particolare è:

$$(\exists b)(\forall a)((a \,\varepsilon\, b) \equiv (a \,\varepsilon\, a \wedge \neg(a \,\varepsilon\, a))) \tag{3.29}$$

Come già visto, è possibile costruire un modello di Rickey dove l'assioma è vero ma questa tesi è falsa. Non è invece possibile fare lo stesso con la base assiomatica di OE+.

[14] [Iwanus 1973], p.171.

Possiamo verificare questo in maniera intuitiva, con il seguente ragionamento. Il membro destro dell'equivalenza risulta sempre falso. Perché risulti vera la tesi nel complesso, deve essere falso anche il membro sinistro ($\forall a\ a \varepsilon b$). Dunque deve esserci almeno un nome $b$ che non nomini alcun individuo che possiede un qualsiasi nome $a$ - in altre parole, deve essere presente un nome senza denotazione.

Possiamo notare che questa condizione è fornita proprio dai nuovi assiomi. Infatti, se esiste sempre l'intersezione tra nomi ed il complemento, allora con una semplice operazione insiemistica abbiamo l'unione di tutte le estensioni nominali non vuote della struttura, ed anche il complemento dell'unione. Quest'ultimo complemento è una estensione sotto cui non ricade alcun individuo che abbia un qualsiasi nome $a$ presente nella struttura.

Giacché ogni modello di OE+ deve rispettare la fisionomia imposta dagli assiomi, esso potrà verificare anche la tesi (3.29), e dunque neutralizza il controesempio utilizzato per dimostrare la creatività di (3.14) nell'*Ontologia* standard.

Alla luce di quanto osservato, un primo indizio del meccanismo della creatività ci è fornito dalla conformazione dei modelli dell'*Ontologia*, quando questa è assiomatizzata standard oppure secondo la proposta di Iwanus. L'*Ontologia* ammette le definizioni creative perché il suo assioma risulta vero in modelli dove non vigono particolari condizioni di esistenza rispetto ai prodotti di operazioni insiemistiche. Qualora tali condizioni vengano poste mediante assiomi, il potenziale creativo è soppresso: nei modelli di OE+, ogni nome definito dalle operazioni dell'algebra degli insiemi risulta definito.

Per di più, i risultati delle operazioni algebriche sui nomi *esauriscono* la casistica di estensioni nominali nella struttura, definendole esaustivamente. Poiché nessuna possibile estensione nominale (ottenuta per mezzo di un *definens* composto di formule ben formate di OE) è non-già-definita, ne consegue che nessuna definizione possa introdurre uno scarto creativo.

### 3.4.2 Gli assiomi di Stachniak

I risultati di Iwanus sono ristretti all'ambito dell'*Ontologia elementare*. Una dettagliata proposta per eliminare le definizioni creative nell'*Ontologia* nel suo complesso è contenuta nel primo capitolo di [Stachniak 1981][15].

Stachniak aggiunge all'*Ontologia* un doppio schema d'assiomi, detti 'assiomi definizionali'.

Questa espansione della base assiomatica si avvale di una precedente meta-definizione dell'insieme di formule ben formate dell'*Ontologia* (per inciso, una tale meta-definizione è estranea allo spirito del nominalismo con il quale Leśniewski concepì i propri sistemi logici).

- Si supponga che $y_0, ..., y_k$ siano variabili libere, rispettivamente delle categorie $c_0, ...c_k$, di una formula ben formata dell'*Ontologia* $\Theta$; sia $\theta$ una variabile, non libera in $\Theta$. Allora è possibile inscrivere nell'*Ontologia* l'istanza particolare di una definizione proposizionale che abbia la suddetta formula ben formata cone *definiens*. Ovvero:

[15]E citata anche, per altre fonti, da [Slupecki 1955], p.65.

$$(\exists\theta)(\forall y_0, ..., y_k)(((\theta(x, y_0, ..., y_k)) \equiv (\Theta(x, y_0, ..., y_k)))$$

Con $\theta$ e $\Theta$ di categoria S/$c_0, ...c_k$, e $k \geq 0$.

- Si supponga che x,$y_0, ..., y_k$ siano variabili libere, rispettivamente delle categorie $c_0, ..., c_k$, di una formula ben formata dell'*Ontologia* $x \varepsilon x \wedge \Phi$; sia $\varphi$ una variabile, non libera in $\Phi$. Allora è possibile inscrivere nell'*Ontologia* l'istanza particolare di una definizione nominale che abbia la suddetta formula ben formata come *definiens*. Ovvero:

$$(\exists\varphi)(\forall x, y_0, ..., y_k)((x \varepsilon \varphi(x, y_0, ..., y_k)) \equiv (x \varepsilon x \wedge \Phi(x, y_0, ..., y_k)))$$

Con $x$ di categoria N e $\varphi$ di categoria N/$c_0, ...c_k$, e $k \geq 0$.

Le definizioni dell'*Ontologia* espansa con gli assiomi definizionali soddisfano la condizione di non-creatività[16]. Come ha notato Urbaniak[17], il duplice schema d'assiomi sembra catturare una certa forma dell'assioma di comprensione. In altre parole, stabilisce che ogni possibile formula ben formata dell'*Ontologia* definisce una costante. L'affinità con il principio di comprensione risiede nel fatto che non c'è 'estensione' che non abbia un nome, cioè che non sia riassunta in una 'intensione'.

Alla luce di questo, sembra corretto vedere nelle istanze particolari la fonte della creatività delle definizioni, nell'*Ontologia* standard. Infatti, in assenza di un principio di comprensione, allo stadio inziale del sistema non tutte le 'estensioni' sono riassunte in una 'intensione'. L'introduzione di definizione creativa è un singolo contributo al principio di comprensione: lo scarto creativo consiste nell'aver astratto una formula complessa (il *definiens*) in una formula semplice (il termine definito). Allo stadio successivo di derivazione, è possibile quantificare sull'estensione descritta, in quanto riassunta in un singolo termine: ciò non era possibile prima della definizione, che dunque risulta essere creativa.

La creatività delle definizioni di costanti nominali sembra dunque derivare dal trattamento particolare che i quantificatori ricevono nell'impostazione di Leśniewski. L'istanza particolare di una definizione vincola una variabile nominale, la quale ha sostituito il termine definito nella formula. Ma il valore della variabile non è un *individuo*, bensì un *nome*. Poiché non tutte le estensioni nominabili (definibili) sono effettivamente nominate (definite) allo stadio iniziale del sistema, è evidente come questa scelta tecnica giochi un ruolo rilevante, anche dal punto di vista concettuale, nel determinare la creatività di alcune definizioni nominali. In particolare, potrebbe spiegare il fatto che certe definizioni siano creative, nonostante l'istanza particolare che ne consegue non vincoli variabili di nessuna categoria semantica che già non fosse precedente nel sistema. Nei casi analizzati, ciò che conta non è la categoria della variabile vincolata dal quantificatore particolare: è la posizione che essa occupa nel contesto della formula, dunque la sua relazione con la sottoformula *definiens* che ne determina l'estensione.

[16]Cfr. [Stachniak 1981], p.17.
[17][Urbaniak 2008], p.84, n.11.

# Conclusione

I risultati presentati nell'ultimo capitolo non rappresentano che l'inizio di un lavoro di ricerca più ampio. I quesiti posti, prima delle stesse risposte, richiedono una ulteriore messa a fuoco, al fine di determinare in modo formale e sistematico quali proprietà delle definizioni consideriamo realmente interessanti.

A questo proposito, ritengo che le mie osservazioni riguardo i lavori di Iwanus e Stachniak siano al momento poco più che abbozzi di idee. In primo luogo, ho sostenuto che sussista una relazione tra la presenza di un'algebra dei nomi e la creatività delle definizioni di costanti nominali. Il prossimo passo sarebbe quello di esplicitare tale relazione sotto forma di meta-teorema. In modo analogo, ulteriori strumenti formali potrebbero gettare maggiore luce sul nesso tra creatività delle definizioni e la presenza di uno schema di comprensione.

**Semantica** Gli stessi metodi dimostrativi necessitano di ulteriori raffinamenti. La semantica di Rickey vale solo per un frammento dell'*Ontologia*: alla stregua delle proposte di altri autori, la sua generalizzazione a variabili di qualsiasi categoria semantica appare piuttosto problematica, forse insolubile con un approccio solo insiemistico.

L'alternativa potrebbe essere un approccio ancora model-teoretico, ma basato su grafi oppure categorie. Un'altra possibilità potrebbe essere una analisi più spiccatamente dimostrativo-teoretica della creatività, che si avvalga degli strumenti messi a disposizione della moderna teoria della dimostrazione.

**Prototetica** Da questo punto di vista, una trattazione delle definizioni creative nella *Prototetica* appare un compito più semplice. Infatti una interpretazione per le sue tesi coinvolge proposizioni e funtori proposizionali, ma nessuna estensione nominale. Nonostante una semantica combinatoria basata su tavole di verità potrebbe sembrare sufficiente allo scopo, per qualche ragione nessuno studio sistematico è stato ancora proposto sull'argomento. Nella letteratura, il tema delle definizioni creative nella *Prototetica* è trattato in misura molto minore rispetto all'*Ontologia*. Probabilmente questa carenza di riferimenti scritti deriva in buona parte da circostanze storiche. La morte prematura di Leśniewski e la perdita dei suoi lavori inediti hanno precluso la possibilità di conoscere quali risultati egli ed i suoi collaboratori avessero raggiunto in questo ambito - risultati che gli appunti dei suoi studenti suggeriscono ma non illustrano mai in maniera esplicita ([Slupecki 1953], p.27, n.24; un altro riferimento è in [Le Blanc 1991], pp.7-8).

**Ontologia elementare** Per quanto concerne la creatività dell'*Ontologia*, ritengo che l'indagine possa essere suddivisa in due parti. Il primo filone riguarda il sotto-sistema *elementare*, dove la quantificazione è ristretta a variabili nominali. Nei miei intenti, il presente lavoro vuole fornire un contributo in questo ambito, proponendo un *metodo effettivo* - la costruzione di numeri di Rickey, istanze particolari e modelli naturali - per generare una sequenza infinita di definizioni creative nell'*Ontologia elementare*.

In aggiunta a questo, gli strumenti dimostrativi da me utilizzati intendono specificare e sviluppare i metodi introdotti in maniera implicita da altri autori. In particolare, la presentazione della proiezione sulla Prototetica vorrebbe essere una chiarificazione del procedimento di cui si servono in forma sintetica sia [Iwanus 1973] (p.166, n.2) che [Mièville 2004] (pp.143-144). Invece la semantica a modelli naturali intende riproporre lo spunto offerto da [Rickey 1985]. Nel complesso, ho tentato di fornire schemi dimostrativi in forma generale, che possano essere riutilizzati in maniera agevole per dimostrare la creatività di qualunque definizione di costante nominale.

**Ontologia non elementare** Per quanto riguarda la seconda parte dell'indagine, sulla creatività nell'*Ontologia* nel suo complesso, restano in sospeso numerosi punti di indagine. In questa sede, si sono prese in considerazione esclusivamente le definizioni di costante nominale. Manca invece una trattazione delle definizioni creative di funtori di valore nominale, così come dell'interessante sotto-insieme dei funtori parametrici. Il principale ostacolo sembra essere costituito dalla difficoltà di fornire una interpretazione plausibile per espressioni del linguaggio dell'*Ontologia* comprendenti funtori e variabili di ordine superiore. In particolare, il carattere inscrizionale del sistema logico, enfatizzato dalla presenza delle definizioni, insieme alla possibilità di quantificare su qualsiasi categoria semantica, sembrano rappresentare un serio impedimento ad una indagine meta-teorica condotta con metodi tradizionali.

# Bibliografia


[Ajdukiewicz 1935] K. Ajdukiewicz, *Die syntaktische Konnexität* (*La connessità sintattica*), trad. G.Piana, in *La struttura logica del linguaggio*, Bergamo, Studi Bompiani, 2001, pp.345-372.

[Barendregt 1992] K.H. Barendregt, *Lambda calculi with types*, Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 2, Oxford, Oxford University Press, 1992.

[Canty 1967] J.T. Canty, *Leśniewski Ontology and Gödel Incompleteness Theorem*, Dissertazione di dottorato, University of Notre Dame, 1967.

[Canty 1969a] J.T. Canty, *The numerical epsilon*, Notre Dame Journal of Philosophy, 10.1, 1969, pp. 47-63.

[Canty 1969b] J.T. Canty, *Leśniewski's terminological explainations as recursive concepts*, Notre Dame Journal of Philosophy, 10.4, 1969, pp.337-369.

[Canty 1969c] J.T. Canty, *Ontology: Leśniewski's logical language*, International Journal of Language and Philosophy, 5, 1969, pp.455-469.

[Frege 1893] G. Frege, *Grundgesestze der Arithmetik*, vol. 1, Jena, 1893.

[Frege 1903] G. Frege, *Grundgesestze der Arithmetik*, vol. 2, Jena, 1903.

[Ginisti 1991] J. P. Ginisti, *La créativité des définitions dans les systèmes para-euclidiens*, Mathématiques et sciences humaines, tomo 116, 1991, pp.69-88.

[Henry 1969] D.P. Henry, *Leśniewski's Ontology and some medieval logicians*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 10, 1969, pp.324-326.

[Iwanus 1973] B. Iwanus, *On Leśniewski's elementary Ontology*, Studia Logica, 31, pp.7-72, 1973, anche in [Srzednicki, Rickey 1984].

[Joray 2005a] P. Joray, *Should definitions be Internal?*, in *The Logica Yearbook 2004*, Praga, Bilkova e Behounek, 2005, pp.189-99.

[Joray 2005b] P. Joray, *What is wrong with creative definitions?*, Logica (Univ. de Wroclaw), 23, 2005.

[Joray 2006] P. Joray, *La définition dans les systèmes logiques de Lukasiewicz, Leśniewski et Tarski*, in *La philosophie en Pologne 1918-1939*, Paris, Pouvet e Rebushi, 2006.

[JORAY 2007] P. JORAY, *A new path to the logicist construction of numbers*, in *Contemporary perspectives on Logicism and the foundation of mathematics*, Neuchâtel, Universitè de Neuchâtel: Travaux de Logique 18, 2007.

[JORAY, MIÈVILLE 2007] *Dèfinition. Rôles et fonctions en logique et en mathèmatiques*, a cura di P. Joray e D. Mièville, Neuchâtel, Universitè de Neuchâtel: Travaux de Logique 19, 2007.

[KOTARBISNKI 1967] T. KOTARBISNKI, *Notes on the Development of Formal Logic in Poland in the Years 1900-39*, in [MCCALL 1967].

[KÜNG 1967] G. KÜNG, *The meaning of the quantifiers in the logic of Leśniewski*, Studia Logica, 36, 1977, pp.309-322.

[LE BLANC 1991] V. LE BLANC, *Leśniewski's computative protothetic*, Dissertazione di dottorato, University of Manchester, 1991.

[LEJEWSKI 1954] C. LEJEWSKI, *Logic and existence*, British journal of Philosophy of Science, 5, 1954, pp.104-119, anche in [SRZEDNICKI, RICKEY 1984].

[LEJEWSKI 1958] C. LEJEWSKI, *On Leśniewski's Ontology*, Ratio, 1, pp.150-176, 1958, anche in [SRZEDNICKI, RICKEY 1984].

[LEJEWSKI 1995] C. LEJEWSKI, *Remembering Stanislaw Leśniewski*, in [MIÈVILLE, VERNANT 1995].

[LEŚNIEWSKI 1913] S. LEŚNIEWSKI, *Krytyka logicznej zasady wylaczonego srodku* (*The critique of the logical principle of the excluded middle*), trad. S. J. Surma, J. T. J. Srzednicki, J. D. Barnett and V. F. Rickey, in [LESNIEWSKI 1992], pp. 47-85.

[LEŚNIEWSKI 1927-31] S. LEŚNIEWSKI, *O podstawach matematyki* (*On the foundations of mathematics*), trad. S. J. Surma, J. T. J. Srzednicki, J. D. Barnett and V. F. Rickey, in [LESNIEWSKI 1992], pp. 350-382.

[LEŚNIEWSKI 1929] S. LEŚNIEWSKI, *Grundzüge eines neuen System der Grundlagen der Mathematik* (*Fundamentals of a new system of the foundations of mathematics*), in [LEŚNIEWSKI 1992], pp. 410-492.

[LEŚNIEWSKI 1930a] S. LEŚNIEWSKI, *Uber die Grundlagen der Ontologie* (*On the foundations of Ontology*), trad. S. J. Surma, J. T. J. Srzednicki, J. D. Barnett and V. F. Rickey, in [LEŚNIEWSKI 1992], pp. 606-628.

[LEŚNIEWSKI 1930b] S. LEŚNIEWSKI, *Uber Definitionen in der sogenannten Theorie der Deduction* (*On definitions in the so-called theory of deduction*),trad. S. J. Surma, J. T. J. Srzednicki, J. D. Barnett and V. F. Rickey, in [LEŚNIEWSKI 1992], pp. 629-648.

[LEŚNIEWSKI 1992] *Stanislaw Leśniewski Collected Works*, a cura di S.J.Surma, J.T.J.Srzednicki, D.I.Barnett e V.F. Rickey. 2 voll., Dordrecht/Warszawa/Kluwer, Polish Scientific Publishers, 1992.

[LUKASIEWICZ 1907] J. LUKASIEWICZ, *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*(*Del princpio di contraddizione in Aristotele*), trad. G. Maszkowska, Macerata, Quodlibet, 2003.

[LUKASIEWICZ 1928] J. LUKASIEWICZ, *O definicyach w teoryi dedukcyi* (*Sur les définitions dans les systèmes déductifs*, trad. in [JORAY 2006], appendice I.

[LUKASIEWICZ 1939] J. LUKASIEWICZ, *Der Äquivalenzenkalkül* (*The Equivalential calculus*), trad. in [MCCALL 1967].

[LUSCHEI 1962] E.C. LUSCHEI, *The Logical Systems of Leśniewski*, Amsterdam, North Holland, 1962.

[MARSONET 1985] M. MARSONET, *Logica e impegno ontologico, saggio su S.Leśniewski*, Milano, Arngeli, 1985.

[MCCALL 1967] *Polish Logic, 1920-1939*, a cura di S. McCall, Oxford, Oxford University Press, 1967.

[MIÈVILLE 1992] D. MIÈVILLE, *S.Leśniewski, ou une manière d'aborder l'ontologie*, Sèmiotiques, 2, 1992, pp.19-35.

[MIÈVILLE 2001] D. MIÈVILLE, *Introduction a l'oeuvre de S.Leśniewski, fascicule I: la protothètique*, Neuchâtel, CdRS, Universitè de Neuchâtel, 2001.

[MIÈVILLE 2004] D. MIÈVILLE, *Introduction a l'oeuvre de S.Leśniewski, fascicule II: l'Ontologie*, Neuchâtel, CdRS, Universitè de Neuchâtel, 2004.

[MIÈVILLE, VERNANT 1995] D. MIÈVILLE. D.VERNANT, *Stanislaw Leśniewski aujourd'hui*, Grenoble/Neuchâtel, Groupe de Recherches sur la philosophie et le langage/Centre de Recherches Sémiologiques, 1995.

[MYHILL 1953] J. MYHILL, *Arithmetic with Creative Definitions by Induction*, Journal of Symbolic Logic, 18, 1953, pp. 115-118.

[NEMESSZEGHY, NEMESSZEGHY 1971] E. A. NEMESSZEGHY, E. Z. NEMESSZEGHY, *Is* $(p \supset q) = (\neg p \vee q)$ $Df$ *a proper definition in the system of Principia Mathematica?*, Mind, Aprile, 1971, pp. 282-283.

[QUINE 1961] W. V. QUINE, *From a logical point of view*, Harvard, Harvard University Press, 1961.

[RICKEY 1972] F.V. RICKEY, *Axiomatic inscriptional sintax I*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume XIII, Number 1, 1972, pp.1-33.

[RICKEY 1973] F.V. RICKEY, *Axiomatic inscriptional sintax II*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume XIV, Number 1, 1973, pp.1-52.

[RICKEY 1975] F.V. RICKEY, *Creative definitions in propositional calculi*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume XVI, Number 2, 1975, pp.273-294.

[Rickey 1978] F.V. Rickey, *On Creative Definitions in First Order Functional Calculi*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume XIX, Number 2, 1978, pp.307-309.

[Rickey 1985] F.V. Rickey, *Interpretations of Leśniewskiś Ontology*, Dialectica, 39, 1985, pp.181-192.

[Rogers 1971] R. Rogers, *Mathematical logic and formalized theories* (*Logica matematica e teorie formalizzate*, trad. D. Silvestrini, Milano, Feltrinelli, 1978.

[Russell 1908] B. Russell, *Mathematical logic as based on the theory of types*, American Journal of Mathematics, 30, pp.222-262, 1908.

[Russell 1918] B. Russell, *The philosophy of logical atomism*, Monist, vols. 28-29, 1918, anche in *Logic and knowledge: Essays, 1901-1950.*

[Russell 1937] B. Russell, *Introduction to the second edition*, nella seconda edizione di [Russell, Whitehead 1910].

[Russell, Whitehead 1910] B. Russell, A. Whitehead, *Principia Mathematica*, London, Cambridge University Press, 1910, Ristampato nel 1960,

[Russell, Whitehead 1910b] *Introduzione ai Principia Mathematica*, trad. parziale di [Russell, Whitehead 1910], a cura di P.Parrini, Firenze, La Nuova Italia, 1977.

[Simons 1985] P. Simons, *A semantics for Ontology*, Dialectica, 39, 1985, pp.193-215.

[Simons 2007] P. Simons, Voce 'Stanislaw Leśniewski', Stanford Encyclopedia of Philosophy, url: http://plato.stanford.edu/entries/Leśniewski/, 2007.

[Slupecki 1953] J.S. Slupecki, *Leśniewski Protothetics*, Studia Logica, I, 1953, pp.44-111.

[Slupecki 1955] J.S. Slupecki, *Leśniewski Calculus of Names*, Studia Logica, III, 1955, pp.7-70, anche in [Srzednicki, Rickey 1984].

[Sobocinski 1960] B. Sobocinski, *On the Single Axioms of Protothetic*, Notre Dame Journal of Philosophy, I/II, 1960, pp.52-73 / pp.111-126 e 129-148.

[Srzednicki, Rickey 1984] *Leśniewski Systems. Ontology and Mereology*, a cura di J.Srzednicki e F.V.Rickey, Boston/The Hague/Nijhow/Ossolineum, Martinus Nijhow Publishers, 1984.

[Stachniak 1981] Z. Stachniak, *Introduction to model theory for Leśniewski's ontology*, Wroclaw, Wydawnictwo Uniwersytetu Wroclawskiego, 1981.

[TARSKI 1934] A. TARSKI, *The concept of truth in formalized languages*, in *Logic, Semantics, Metamathematics*, Indianapolis, Hackett Publishing Company, 1983.

[TARSKI, LINDENBAUM 1983] A. TARSKI, A. LINDENBAUM, *On the limitations of the means of the expression of deductive theories*, in *Logic, Semantics, Metamathematics*, Indianapolis, Hackett Publishing Company, 1983.

[URBANIAK 2008] R. URBANIAK, *Leśniewski Systems of Logic and Mereology; History and Re-evaluation*, Dissertazione di dottorato, University of Calgary, 2008.

[URBANIAK 2008] R. URBANIAK, *Leśniewski and Russell's paradox: some problems*, History and Philosophy of Logic, 29:2, 2008, pp.115-146.

[ZANASI 2010] F. ZANASI, *La definizione nei sistemi logici di S.Leśniewski*, Annali della Facoltà di Lettere e Filosofia dell'Università di Siena, Firenze, Cadmo, in corso di pubblicazione.